



Théorie de l'information, jeux répétés avec observation imparfaite et réseaux de communication décentralisés

Mael Le Treust

► To cite this version:

Mael Le Treust. Théorie de l'information, jeux répétés avec observation imparfaite et réseaux de communication décentralisés. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112269 . tel-00656783

HAL Id: tel-00656783

<https://theses.hal.science/tel-00656783>

Submitted on 5 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD XI

Spécialité :

PHYSIQUE

Présentée par :

Maël LE TREUST

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD XI

Sujet :

THÉORIE DE L'INFORMATION, JEUX RÉPÉTÉS AVEC OBSERVATION
IMPARFAITE ET RÉSEAUX DE COMMUNICATION DÉCENTRALISÉS

Soutenue le 06 décembre 2011 devant le jury composé de :

Jean-Claude BELFIORE	<i>Rapporteur</i>
Mérouane DEBBAH	<i>Co-encadrant</i>
Pierre DUHAMEL	<i>Examineur</i>
Inbar FIJALKOW	<i>Examinatrice</i>
Samson LASAULCE	<i>Directeur de thèse</i>
Tristan TOMALA	<i>Rapporteur</i>
Abdellatif ZAIDI	<i>Examineur</i>

Remerciements

Je remercie sincèrement mon directeur de thèse, Samson Lasaulce, pour avoir fait le pari d'encadrer mon travail pendant trois ans. J'ai beaucoup apprécié l'enthousiasme qu'il insuffle à son équipe et qui m'a amené à travailler sur trois domaines de recherche. Je veux exprimer ma profonde gratitude et toute ma reconnaissance pour l'effort qu'il a fourni. Je veux également remercier Mérouane Debbah qui fut, durant une année, mon directeur de thèse officiel. J'ai beaucoup apprécié le dynamisme scientifique, les conseils avisés et la créativité qui rythmèrent nos nombreuses discussions. Je suis très reconnaissant envers Jean-Claude Belfiore et Tristan Tomala qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je veux également remercier Pierre Duhamel, Inbar Fijalkow et Abdellatif Zaidi de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Je tiens à remercier Thierry Lafay et Eric Balandraud pour m'avoir proposé de prendre en charge des travaux dirigés à l'université de Paris I et de Paris VI. Je veux également remercier le travail fédérateur de Sylvain Sorin autour du séminaire parisien et du GDR de théorie des jeux, porté également par le dynamisme des organisateurs. Je veux aussi remercier Pablo Piantanida pour ses cours qui m'ont fait découvrir la théorie de l'information ainsi que pour ses conseils scientifiques. Je remercie sincèrement les membres du laboratoire des signaux et systèmes et des laboratoires de Supélec, les permanents, les doctorants et post-doctorant ainsi que ceux du séminaire parisien de théorie des jeux. Ce fut un plaisir de côtoyer, Samir, Véronica, Brice, Jose, Amadou, Sophiane, Cagatay, Francesca, Neila, Nabil, Alex, François, Elsa, Ziad, Lana, Zeina, Alessandro, Aminata, Tembine, Ngoc, Dinh Tuan, Xuan Thang, Duy, Benjamin, Meriam, Vineeth, Olivier, Anna, Jinane, Jean-François, Najett, Layane, Laurie, Alessio, Matthieu, Islam, Ali, Israel, Hashem, Diarra, Loïc, Jakob, Julia, Luca, Marco, Salam, Subhash, Alonzo, Gao-ning, Leo, Raul, Maï, Romain, Antonia, Karim le juriste, Ejder, mais aussi Mario, Lucho, Marie, Matthieu, Vianey, Guillaume, Xavier, Fabien, Antoine. Un grand merci à mes amis Fanny, Juliette, Jérémy, Alexis et Rose pour avoir eu le courage de relire le charabia que j'ai écrit.

Je veux remercier toute ma famille pour les encouragements et le soutien sans faille qui m'ont permis d'affronter ces trois années de labeur avec une confiance plus grande. Merci Papa, Maman et Loïc qui n'ont pas eu d'autres choix que de relire mon manuscrit plusieurs fois de suite. Merci Édith, pour être venue assister à ma soutenance et nous régaler de crêpes au caramel.

Je remercie chaleureusement mes amis qui m'ont accompagné au long de ces trois années dans d'autres types de recherches scientifiques, celles qui nous permettent de découvrir la vie avec plus d'humour, de sagesse, de folie et de chaleur humaine.

Enfin, je veux remercier celle qui m'a soutenu durant cette longue aventure, obligée parfois de supporter mes monologues, celle avec qui c'est un plaisir de passer chaque jour, merci Gabi.

Paris, décembre 2011.

À Jean-Yves, Marie-Thé, Loïc, Gabi et Marguerite.

Table des matières

Page de garde	i
Table des matières	x
Table des figures	xv
Résumé en français	xvii
Abstract in English	xviii
Notations et glossaire	xix
1 Introduction	1
1.1 Point de vue	1
1.2 Objectifs de la thèse	3
1.3 Structure du manuscrit	4
1.4 Contributions	7
1.5 Publications	10
1.5.1 Revues internationales	10
1.5.2 Congrès internationaux avec comité de lecture et actes	10
1.5.3 Congrès nationaux avec comité de lecture et actes	11
2 Jeux répétés avec signaux et théorème Folk	13
2.1 Description et résultats principaux	13
2.2 Théorème Folk pour le "dilemme du prisonnier"	13
2.3 Modèle du jeu en un coup	14
2.3.1 Équilibre de Nash du jeu en un coup G	15
2.4 Jeu répété avec observation parfaite	16
2.4.1 Modèle du jeu répété Γ avec observation parfaite	16

2.4.2	Jeu répété infini Γ^∞	17
2.4.2.1	Théorème Folk infini avec observation parfaite	18
2.4.3	Jeu répété escompté Γ^λ	18
2.4.3.1	Théorème Folk escompté avec observation parfaite	19
2.4.4	Jeu répété fini Γ^T	19
2.4.4.1	Théorème Folk fini avec observation parfaite	20
2.5	Jeu répété avec observation imparfaite	20
2.5.1	Modèle de jeu répété avec observation imparfaite	20
2.5.2	Le problème du théorème Folk avec observation imparfaite	22
2.5.2.1	Structure d'observation semi-standard	22
2.5.2.2	Structure d'observation sur un graphe 2-connexe	23
2.5.2.3	Structure d'observation presque parfaite	24
2.5.2.4	Structure d'observation publique	25
2.6	Démonstration des théorèmes Folk avec observation parfaite	26
2.6.1	Théorème 2.8 Folk infini avec observation parfaite	26
2.6.2	Théorème 2.10 Folk escompté avec observation parfaite	29
2.6.3	Théorème 2.13 Folk fini avec observation parfaite	31
2.7	Conclusion et perspectives	33
3	Jeu du contrôle de puissance	35
3.1	Description et résultats principaux	35
3.2	Modèle de canal	36
3.3	Jeu du contrôle de puissance en un coup	38
3.4	Jeu du contrôle de puissance avec hiérarchie	39
3.5	Jeu du contrôle de puissance répété	41
3.5.1	Hypothèses d'information stratégique	41
3.5.2	Jeu répété pour le jeu du contrôle du puissance	42
3.5.3	Point de coopération intéressant pour le jeu en un coup G	44
3.5.4	Stratégies d'équilibre du jeu répété	47
3.6	Le théorème Folk et le contrôle de puissance	49
3.6.1	Contrôle de puissance lent	50

3.6.2	Contrôle de puissance rapide	51
3.6.2.1	Déroulement du jeu	51
3.6.2.2	Propriété d'irréductibilité et indépendance de l'état initial	52
3.6.2.3	Résultat principal : le théorème Folk	53
3.7	Résultats numériques	54
3.8	Démonstrations	64
3.8.1	Démonstration de la proposition 3.9	64
3.8.2	Démonstration de la proposition 3.10	65
3.8.3	Démonstration des théorèmes 3.11 et 3.12	65
3.8.4	Démonstration du théorème 3.14	67
3.8.5	Démonstration du théorème 3.18	69
3.9	Conclusion et perspectives	69
4	Reconstruction d'une structure d'observation	71
4.1	Description et résultats principaux	71
4.2	Reconstruction de l'observation parfaite	73
4.2.1	Modèle d'observation assistée d'un encodeur	74
4.2.2	Existence de la reconstruction optimale	75
4.2.3	Caractérisation de la reconstruction optimale	77
4.2.4	Reconstruction pour plusieurs joueurs	78
4.2.5	Prix de la reconstruction	80
4.2.6	Exemple appliqué au jeu du contrôle de puissance	81
4.2.7	Démonstrations	84
4.2.7.1	Théorème 4.8	84
4.2.7.2	Théorème 4.10	87
4.3	Reconstruction de l'observation ε -parfaite	88
4.3.1	Observation ε -parfaite assistée d'un encodeur	89
4.3.2	Existence de la reconstruction de l'observation ε -parfaite	90
4.3.3	Une reconstruction qui réduit la cardinalité $ \mathcal{R} $	92
4.3.4	Prix de la reconstruction	92
4.3.5	Exemple appliqué au jeu du contrôle de puissance	93

4.3.6	Démonstrations	95
4.3.6.1	Proposition 4.19	96
4.3.6.2	Théorème 4.26	96
4.4	Reconstruction asymptotique de l'observation parfaite	98
4.4.1	Modèle d'une source d'actions aux variations arbitraires	99
4.4.2	Source d'actions aux variations arbitraires	101
4.4.3	Source d'actions aux variations arbitraires avec information adjacente	103
4.4.4	Exemple appliqué au jeu du contrôle de puissance	106
4.4.5	Démonstrations	112
4.4.5.1	Démonstration du théorème 4.31	112
4.4.5.2	Démonstration du théorème 4.37	114
4.5	Conclusion et perspectives	117
5	Canal multi-utilisateur et théorème Folk avec observation imparfaite	121
5.1	Description et résultats principaux	121
5.2	Canal discret	123
5.2.1	Modèle de canal	124
5.2.2	Résultat d'atteignabilité	126
5.2.3	Démonstration du théorème 5.6	127
5.3	Canal de diffusion sur écoute Gaussien avec états asymétriques	133
5.3.1	Modèle du canal Gaussien	133
5.3.2	Région des débits réalisables (R_1, R_2)	135
5.3.3	Démonstration du théorème 5.9	137
5.3.4	Illustrations numériques	137
5.4	Niveaux min-max d'un jeu répété à quatre joueurs avec observation imparfaite	141
5.4.1	Modèle des niveaux min-max du jeu répété	141
5.4.2	Résultat de borne supérieure sur les niveaux min-max	143
5.4.3	Démonstration du théorème 5.18	147
5.4.3.1	Résumé de la démonstration	147

5.4.3.2	Stratégie de codage τ_{123} pour les joueurs J_1, J_2 et J_3 . . .	148
5.4.3.3	Suites de croyances du joueur J_4 et leurs distributions empiriques	149
5.4.3.4	Sur le bloc j , la distribution de probabilités moyenne des actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ converge faiblement vers la distribution optimale \bar{Q}_j	150
5.4.3.5	Sur le bloc j , la distribution de probabilités moyenne des croyances \bar{Q}_{123} converge faiblement vers la distribution optimale \bar{Q}_j	151
5.4.3.6	Les distributions de probabilités moyenne des actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ et des croyances \bar{Q}_{123} convergent faiblement vers la distribution optimale \bar{Q}^*	154
5.4.3.7	Stratégie optimale du joueur J_4	155
5.4.3.8	Démonstration du théorème 5.18	155
5.5	Conclusion et perspectives	156
6	Conclusion	159
6.1	Bilan	159
6.2	Perspectives	161
A	Théorie de Shannon	163
A.1	Entropie et information mutuelle	163
A.2	Suites typiques	165
A.3	Codage de source	169
A.4	Codage de canal	170
A.5	Codage de source-canal conjoint	171
A.6	Source avec information adjacente au décodeur	172
A.7	Canal avec état connu par l'encodeur (non-causal)	173
A.8	Codage conjoint d'une source avec information adjacente et d'un canal avec état	174
A.9	Canal de diffusion	175
A.10	Canal sur écoute	176
A.11	Bibliographie	179

Table des figures

2.1	Matrice des utilités du "dilemme du prisonnier" où l'équilibre est noté " \star ". .	14
2.2	$u(\Delta(\mathcal{A}))$ représente l'ensemble des utilités réalisables pour le jeu répété Γ , IR représente l'ensemble des utilités individuellement rationnelles. L'intersection de ces deux ensembles (partie grisée) représente la région des utilités d'équilibre du jeu répété. L'utilité cerclée est celle de l'équilibre de Nash du jeu en un coup.	15
2.3	Exemple de graphe d'observation 2-connexe \mathcal{G}	24
3.1	Canal à accès multiples décentralisé au sens du contrôle de puissance. À l'étape $t \geq 1$, le joueur $k \in \mathcal{K}$ choisi la puissance $p_k(t)$ de transmissions des symboles $x_k(t)$. Le signal reçu par la station de base (SB) s'écrit $y(t)$. Cette dernière envoie le signal RSIB $_k$ à chaque joueur.	37
3.2	Région des utilités normalisées \hat{u}_k atteignables pour $(K, M, N) = (2, 2, 2)$. .	57
3.3	Dynamique de gains du canal admissibles par rapport au nombre d'étapes du jeu pour $M = 2$ et $(K, N) \in \{(2, 2), (4, 5), (10, 12)\}$	58
3.4	Dynamique de gains du canal admissibles par rapport au taux d'escompte pour $M = 2$ et $(K, N) \in \{(2, 2), (4, 5), (10, 12)\}$	59
3.5	Pourcentage d'amélioration de l'utilité sociale pour l'équilibre du jeu répété (w_{JRE}) et pour l'équilibre de Stackelberg (w_{SE}) par rapport à l'équilibre de Nash (w_{NE}) en fonction de la charge (K/N) du système.	60
3.6	Amélioration de l'utilité sociale pour le jeu répété fini (w_{FRG}) par rapport à l'équilibre de Nash (w_{NE}) en fonction du nombre d'étapes T du jeu. . . .	61
3.7	Région des utilités espérées atteignables pour $(K, M, N) = (2, 2, 2)$ avec un processus stochastique sur les gains des canaux.	62
3.8	Pourcentage d'amélioration de l'utilité sociale pour l'équilibre du jeu répété avec des gains stochastiques (w_{JRES}) et pour l'utilité de coopération (w_{JRE}) par rapport à l'équilibre de Nash (w_{NE}) en fonction de la charge (K/N) du système.	63

4.1	Structure d'observation \mathbb{T} assistée d'un encodeur \mathcal{C}	71
4.2	L'encodeur \mathcal{C} observe une version dégradée s_0 de l'action $a \in \mathcal{A}$ à travers \mathbb{T}_0 et renvoie un message $r \in \mathcal{R}$ au joueur J . Ce dernier reconstruit $a \in \mathcal{A}$ à partir des signaux $r \in \mathcal{R}$ et $s \in \mathcal{S}$	74
4.3	Deux joueurs J_1 et J_2 observent chacun une version dégradée $s_k \in \mathcal{S}_k$ de l'action $a \in \mathcal{A}$ à travers un canal \mathbb{T}_k avec $k \in \{J_1, J_2\}$. L'encodeur \mathcal{C} observe une version dégradée $s_0 \in \mathcal{S}_0$ de l'action $a \in \mathcal{A}$ et renvoie un message commun $r \in \mathcal{R}$ à tous les joueurs \mathcal{K} . Le joueur $k \in \mathcal{K}$ reconstruit l'action $a \in \mathcal{A}$ grâce aux signaux $r \in \mathcal{R}$ et $s_k \in \mathcal{S}_k$	78
4.4	Structure d'observation des joueurs J_1 et J_2	81
4.5	Structure d'observation de l'encodeur \mathcal{C}	82
4.6	Matrice des utilités du jeu restreint.	82
4.7	Graphe d'observation $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ des joueurs J_1 et J_2	82
4.8	Graphes bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{K}}$	83
4.9	Fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ optimale.	83
4.10	Région des utilités restreintes réalisables pour $(K, M, N) = (2, 2, 2)$	84
4.11	Structures d'observation des joueurs J_1 et J_2 avec précision x et x'	93
4.12	Structure d'observation de l'encodeur \mathcal{C} avec précision y	94
4.13	Graphe d'observation $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ des joueurs J_1 et J_2	94
4.14	Graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{K}}$	95
4.15	Fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ qui réduit la cardinalité $ \mathcal{R} $	95
4.16	Les joueurs $k \in \mathcal{K}$ choisissent leurs suites d'actions a_k^n avec une suite de distributions de probabilités indépendantes et identiquement distribuées $\mathcal{P}_k \in \Delta(\mathcal{K})$ d'étape en étape. Un joueur peut décider de choisir sa suite d'action à travers un processus stochastique différent de celui prescrit $\mathcal{P}_k^{\otimes n} \in \Delta(\mathcal{K})^n$. Le schéma du codage doit être fiable face à toutes les stratégies de déviations unilatérales des joueurs.	100
4.17	L'encodeur \mathcal{C} envoie un message \mathbf{m} au joueur J afin qu'il reconstruise la suite d'actions encodée \mathbf{a}^n . Les joueurs $k \in \mathcal{K}$ peuvent changer la distribution de probabilités $\mathcal{P}_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ sur leurs actions. Le schéma du codage doit être fiable face à toutes les stratégies de déviations unilatérales des joueurs.	102

4.18	Le joueur J observe une image \mathbf{s}^n du vecteur d'actions $\mathbf{a}^n = (\mathbf{a}_1^n, \dots, \mathbf{a}_K^n)$. L'encodeur \mathcal{C} envoie un message \mathbf{m} de cardinalité minimale M au joueur J afin qu'il reconstruise la suite d'actions encodée \mathbf{a}^n . Les joueurs peuvent changer la distribution de probabilités $\mathcal{P}_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ sur leurs actions. Le schéma du codage doit être fiable pour toutes les stratégies de déviations unilatérales des joueurs.	104
4.19	Matrice des utilités du jeu restreint.	106
4.20	Lorsque le couple d'actions (puissances d'émission) $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ est joué, le canal d'observation T induit une probabilité sur les signaux $\mathcal{S} = \{s_{\tilde{p}_1 \tilde{p}_2}, s_{\tilde{p}_1 p_2^*}, s_{p_1^* \tilde{p}_2}, s_{p_1^* p_2^*}\}$ décrite par ce tableau. Cette distribution est définie de manière symétrique lorsque les autres couples d'actions $\{(\tilde{p}_1, p_2^*), (p_1^*, \tilde{p}_2), (p_1^*, p_2^*)\}$ sont joués.	107
4.21	Les joueurs J_1 et J_2 observent, à travers T , une image \mathbf{s}^n du vecteur d'actions $\mathbf{a}^n = (\mathbf{a}_1^n, \dots, \mathbf{a}_K^n)$. L'encodeur \mathcal{C} transmet, à travers un canal T_0 , la suite d'actions encodée \mathbf{a}^n , à destination des joueurs J_1 et J_2 . Les joueurs retrouvent la suite des actions passées $\hat{\mathbf{a}}^n = \mathbf{a}^n$ avec une erreur arbitrairement faible si et seulement si le débit \mathcal{R}_{sa}^* de la source est inférieur à la capacité C_0 du canal T_0 , fixée à 1.7 bit par seconde.	108
4.22	Région des utilités du jeu répété qui satisfont les conditions du théorème Folk ainsi que la contrainte de communication $\mathcal{R}^* \leq C = 1.7$ lorsque $\varepsilon = 1$	109
4.23	Région des utilités du jeu répété qui satisfont les conditions du théorème Folk ainsi que la contrainte de communication $\mathcal{R}^* \leq C = 1.7$ lorsque $\varepsilon = 0$	110
4.24	Région des utilités du jeu répété qui satisfont les conditions du théorème Folk ainsi que la contrainte de communication $\mathcal{R}^* \leq C = 1.7$ lorsque $\varepsilon = 0.5$	111
5.1	Canal de diffusion sur écoute avec états asymétriques T . L'encodeur \mathcal{C} envoie le message \mathbf{m}_1 (resp. \mathbf{m}_2) au décodeur \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2) à travers le canal T sans que l'espion \mathcal{E} ne puisse le décoder. Notons \mathbf{x} l'entrée du canal, \mathbf{v}_1 et \mathbf{y}_1 (resp. \mathbf{v}_2 et \mathbf{y}_2) les états et les sorties du canal observés par le premier (resp. le second) décodeur et \mathbf{z} la sortie du canal observée par l'espion.	123
5.2	Canal de diffusion sur écoute Gaussien avec états asymétriques.	134
5.3	Entropies des variables aléatoires	138
5.4	Région des débits qui satisfont les équations du théorème 5.9 pour $\rho = 0$ et trois types d'états du canal $Q_1 = Q_2 \in \{0.2, 2, 20\}$. Les débits appartenant à l'enveloppe convexe de cette région sont réalisables.	139

5.5	Région des débits qui satisfont les équations du théorème 5.9 pour $Q_1 = Q_2 = 0.2$ et trois types de corrélations $\rho \in \{0, 0.7, 1\}$. Les débits appartenant à l'enveloppe convexe de cette région sont réalisables.	140
5.6	Les conditions (5.70)-(5.72) sont vérifiées si la partie grisée est non-vide. Le codage source-canal conjoint avec les débits $H(\mathbf{a}_2), H(\mathbf{a}_3)$ et les capacités $C_2(\mathcal{T}), C_3(\mathcal{T}), C_{23}(\mathcal{T})$ est donc réalisable.	144
5.7	Schéma du codage source-canal conjoint utilisé pour transmettre aux joueurs J_2 et J_3 , à travers les actions a_1^i du joueur J_1 au sous-bloc \mathcal{N}_j^i , les suites d'actions futures a_2^{i+1} et a_3^{i+1} des joueurs J_2 et J_3 au sous-bloc \mathcal{N}_j^{i+1}	145
5.8	Le joueur J_1 utilise ses actions a_1^0 pour transmettre au joueurs J_2 et J_3 , durant le sous-bloc \mathcal{N}_j^0 , les suites d'actions (a_2^1, a_3^1) qu'ils joueront au sous-bloc suivant \mathcal{N}_j^1	149
A.1	Lemme du recouvrement mutuel avec 3 variables et $R_L = 0$	167
A.2	Une source d'information de loi \mathcal{P}_u génère des suites aléatoires de symboles \mathbf{u}^n . L'encodeur \mathcal{C}_s représente la suite de symboles par un message \mathbf{m} auquel le décodeur \mathcal{D}_s associe une suite de symboles reconstruits $\hat{\mathbf{u}}^n$	169
A.3	Un canal \mathcal{T} prend un symbole d'entrée \mathbf{x} et génère une distribution de probabilités sur les sorties \mathbf{y} . L'encodeur \mathcal{C}_c représente le message \mathbf{m} par une suite d'entrées \mathbf{x}^n . Le décodeur \mathcal{D}_c observe une suite de sorties \mathbf{y}^n et reconstruit le message $\hat{\mathbf{m}}$	170
A.4	L'encodeur \mathcal{C}_{sc} observe une suite de symboles de source \mathbf{u}^n de loi \mathcal{P}_u et associe une suite de symboles d'entrée \mathbf{x}^n du canal \mathcal{T} . Le décodeur \mathcal{D}_{sc} reçoit une suite de symboles \mathbf{y}^n de sortie du canal et reconstruit une suite de symboles $\hat{\mathbf{u}}^n$	171
A.5	Schéma du codage source-canal conjoint séparé.	171
A.6	Source d'information \mathbf{u} avec information adjacente \mathbf{v} au décodeur.	172
A.7	Canal \mathcal{T}_s avec un état \mathbf{s} connu de manière non-causale par l'encodeur \mathcal{C}_{ce}	173
A.8	La concaténation des codages des sections A.6 et A.7 est optimale.	174
A.9	Le canal \mathcal{T}_d de diffusion prend un symbole d'entrée \mathbf{x} et génère une distribution de probabilités sur les couples de sorties $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$. L'encodeur \mathcal{C}_c représente le couple de messages $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$ par une suite d'entrées \mathbf{x}^n . Le décodeur \mathcal{D}_k , avec $k \in \{1, 2\}$ observe une suite de sorties \mathbf{y}_k^n et reconstruit un message $\hat{\mathbf{m}}_k$	175

A.10 Le canal \mathcal{T}_e prend un symbole d'entrée \mathbf{x} et génère une distribution de probabilités sur les couples de sorties (\mathbf{y}, \mathbf{z}) . L'encodeur \mathcal{C} représente le message \mathbf{m} par une suite d'entrées \mathbf{x}^n . Le décodeur \mathcal{D} observe une suite de sorties \mathbf{y}^n et reconstruit un message $\hat{\mathbf{m}}$. L'objectif est de maximiser le débit R pour une probabilité d'erreur arbitrairement faible et une incertitude maximale de l'espion, à propos du message envoyé. 177

Résumé en français

Théorie de l'information, jeux répétés avec observation imparfaite et réseaux de communication décentralisés

Cette thèse est consacrée à l'étude des interactions entre la théorie des jeux et la théorie de l'information, ainsi qu'à leurs applications aux réseaux de communication décentralisés. *D'une part*, la théorie des jeux apporte des réponses aux problèmes d'optimisation dans lesquels des agents interagissent. Dans un jeu, les joueurs choisissent des actions et obtiennent des gains appelés utilités. Les hypothèses sur l'information que possèdent les joueurs avant de jouer sont fondamentales pour déterminer l'issue d'un jeu, aussi appelée équilibre. Lorsque le même jeu est répété d'étape en étape et que les joueurs n'observent pas parfaitement les actions passées, alors les utilités d'équilibre ne sont pas connues. *D'autre part*, la théorie de l'information étudie les performances d'un système communicant. De nos jours, les réseaux de communication sont tellement denses qu'ils ne peuvent plus s'organiser autour d'un unique opérateur central. La théorie des jeux est appropriée pour étudier de nouvelles organisations du traitement de l'information dans lesquelles les décisions sont prises localement. Dans un premier temps, au chapitre 3, nous étudions le jeu du contrôle de puissance efficace du point de vue énergétique, grâce aux résultats existants pour les jeux répétés. Les émetteurs sont considérés comme des joueurs et choisissent la puissance d'émission du signal, considérée comme leur action. L'objectif d'un joueur est de choisir une puissance optimale pour la qualité de sa propre communication. Même si les joueurs n'observent pas les actions passées de manière parfaite, nous montrons que l'observation du "ratio signal sur interférence plus bruit" est suffisante pour garantir des résultats d'équilibre optimaux pour le réseau de communication. Dans un second temps, nous utilisons les outils de la théorie de l'information pour approfondir l'étude de la circulation de l'information parmi les joueurs. Dans le chapitre 4, un encodeur envoie un signal supplémentaire aux joueurs afin qu'ils observent parfaitement les actions jouées à l'étape précédente. L'observation des joueurs devient suffisamment précise pour nous permettre de retrouver l'ensemble des utilités d'équilibre du jeu répété. Ces résultats sont à leur tour exploités afin de modéliser des réseaux de communication plus réalistes et d'y apporter des solutions nouvelles. Dans le chapitre 5, nous approfondissons l'étude des utilités d'équilibre lorsque les joueurs observent les actions passées à travers un canal d'observation arbitraire. Nous démontrons un résultat d'atteignabilité pour un canal multi-utilisateurs avec états, comportant un encodeur, deux récepteurs légitimes et un espion. Ce résultat nous permet d'étudier les corrélations entre les suites d'actions qu'un groupe de joueurs peut mettre en œuvre à l'insu d'un joueur opposant. L'étude des canaux multi-utilisateurs est un pas en avant vers la caractérisation des utilités d'équilibre dans un jeu répété avec observation imparfaite.

Mots-clés : Théorie de l'information, théorie des jeux, télécommunications, contrôle de puissance, jeux répétés avec observation imparfaite, théorème Folk, théorie du codage, canaux multi-utilisateurs, niveaux min-max.

Abstract in English

Information theory, repeated games with imperfect monitoring and decentralized communications networks

This thesis is devoted to the study of mutual contributions between games theory and information theory and their applications to decentralized communication networks. *First*, game theory provides answers to optimization problems in which agents interact. In a game, players choose actions and obtain gains called utilities. Assumptions about the information possessed by players before play are fundamental to determine the outcome a game, also called equilibrium. When the same game is repeated from stage to stage and the players do not observe the past actions perfectly, then the equilibrium utilities are not known. *On the other hand*, information theory studies the performance of a communicating system. Nowadays, communication networks are so dense that they cannot organize around a single central operator. Game theory is appropriate to explore new organizations of communication networks in which decisions are taken locally. At first, in Chapter 3, we study the game of power control in terms of energy efficiency, thanks to the existing results for repeated games. Transmitters are regarded as players and choose the transmission power of the signal, considered as their action. The objective of a player is to choose an optimal power for the quality of its own communication. The players do not observe the past actions perfectly, but we show that the observation of the "signal over interference plus noise ratio" is sufficient to ensure optimal equilibrium results for the communication network. In a second step, we use the tools of the information theory for further study of the flow of information among the players. In Chapter 4, an encoder sends an extra signal to the players so that they perfectly observe the actions chosen in the previous stage-game. The observation of players is sufficiently precise to characterize the set of equilibrium utilities of the repeated game. These results are, in turn, used to model new communication networks and to provide more realistic solutions. In Chapter 5, we deepen the study of equilibrium utilities when players observe the past actions to through an arbitrary observation channel. We show a rate region is achievable for the multi-user channel with states which includes an encoder, two legitimate receivers and an eavesdropper. This result allows us to study the correlations over the sequences of actions a group of players can implement while keeping it secret from an opponent player. The study of multi-user channels is a step towards the characterization of equilibrium utilities in a repeated game with imperfect monitoring.

Key words : Information theory, game theory, telecommunications, power control, repeated games with imperfect monitoring, Folk theorem, coding theory, multi-users channels, min-max levels.

Notations et Glossaire

Les notations suivantes seront utilisées dans toute la thèse. Nous rappelons également certaines définitions de théorie des jeux.

Notations générales

- \mathbb{R} désigne le corps des réels.
- $|\mathcal{A}|$ désigne la cardinalité de l'ensemble fini \mathcal{A} .
- $\Delta(\mathcal{A})$ désigne le simplexe des distributions de probabilités sur l'ensemble fini \mathcal{A} .
- $\mathcal{A}^n = \prod_{i=1}^n \mathcal{A}$ désigne le n -produit cartésien de l'ensemble fini \mathcal{A} .
- $\mathcal{P} \in \Delta(\mathcal{A})$ désigne une distribution de probabilités sur l'ensemble fini \mathcal{A} .
- $\prod_{i=1}^n \Delta(\mathcal{A}) \subsetneq \Delta(\mathcal{A}^n)$ désigne le n -produit cartésien du simplexe des probabilités sur l'ensemble fini \mathcal{A} . Cet ensemble est contenu dans le simplexe des distributions de probabilités $\Delta(\mathcal{A}^n)$ sur l'ensemble produit \mathcal{A}^n .
- $\mathcal{P}^{\otimes n} \in \prod_{i=1}^n \Delta(\mathcal{A})$ désigne la distribution de probabilités n -fois produit sur le produit \mathcal{A}^n de l'ensemble fini \mathcal{A} .
- $d(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ désigne la distance de Hausdorff entre deux ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} .
- $\text{conv } \mathcal{A}$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble \mathcal{A} .
- $\mathbb{E}_{\mathcal{P}}$ désigne l'espérance d'une variable aléatoire par rapport à la distribution de probabilités \mathcal{P} .
- $|x|$ désigne la valeur absolue d'un réel $x \in \mathbb{R}$.
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ désigne la norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$.
- $[x]_+$ désigne la partie positive d'un réel $x \in \mathbb{R}$.
- \square désigne la fin d'une démonstration.

Notations relatives aux jeux Un jeu G est défini par un triplet : $G = (\mathcal{K}, (\mathcal{A}_k)_{k \in \mathcal{K}}, (u_k)_{k \in \mathcal{K}})$.

- \mathcal{K} désigne l'ensemble des joueurs.
- \mathcal{A}_k désigne l'ensemble des actions du joueur $k \in \mathcal{K}$.
- $a_k \in \mathcal{A}_k$ désigne une action du joueur $k \in \mathcal{K}$.
- $\mathcal{A} = \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_k$ désigne le produit des ensembles d'actions de tous les joueurs \mathcal{K} .
- $a = (a_1, \dots, a_K) \in \mathcal{A}$ désigne le vecteur des actions de tous les joueurs \mathcal{K} .
- $\mathcal{A}_{-k} = \prod_{j \neq k} \mathcal{A}_j$ désigne le produit des ensembles d'actions de tous les joueurs \mathcal{K} , excepté celui du joueur $k \in \mathcal{K}$.

- $a_{-k} = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_K) \in \mathcal{A}_{-k}$ désigne le vecteur des actions de tous les joueurs \mathcal{K} , excepté celle du joueur $k \in \mathcal{K}$.
- u_k désigne la fonction d'utilité du joueur $k \in \mathcal{K}$.
- $u_k(a_k, a_{-k})$ désigne l'utilité du joueur $k \in \mathcal{K}$ lorsque les actions (a_k, a_{-k}) sont jouées.
- u désigne le vecteur des fonctions d'utilités des joueurs \mathcal{K} .
- $u(a_k, a_{-k})$ désigne le vecteur des utilités des joueur \mathcal{K} lorsque les actions (a_k, a_{-k}) sont jouées.

Notations relatives aux communications

- $H(\mathbf{x})$ désigne l'entropie d'une variable aléatoire \mathbf{x} .
- $I(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ désigne l'information mutuelle entre deux variables aléatoires \mathbf{x} et \mathbf{y} .
- \mathcal{T} désigne un canal d'information.
- \mathcal{C} désigne un encodeur.
- \mathcal{D} désigne un décodeur.
- \mathcal{E} désigne un espion.
- R désigne un débit de communication.
- \mathcal{G} désigne un graphe.
- χ désigne le nombre chromatique d'un graphe \mathcal{G} .

Chapitre 1

Introduction

1.1 Point de vue

La théorie des jeux fournit un ensemble d'outils mathématiques qui permet d'étudier les situations dans lesquelles des preneurs de décisions interagissent. Un jeu est composé de joueurs, chacun ayant à sa disposition plusieurs actions et un ensemble de gains, appelé fonction d'utilité. Une telle situation est dite "stratégique" puisque les gains d'un joueur dépendent des actions de tous les autres joueurs. Chacun des joueurs choisit habilement l'action qu'il va jouer, en tenant compte des intérêts et des gains des autres joueurs. L'objectif est de choisir l'action qui confère un gain maximal. La solution d'un jeu que propose Nash dans [54] est celle de l'équilibre. Les actions des joueurs forment un équilibre de Nash si aucun des joueurs ne peut augmenter son utilité en choisissant unilatéralement une action différente de celle de l'équilibre. L'équilibre de Nash garantit une propriété de stabilité et nous permet de prédire le comportement des joueurs, de caractériser l'issue d'un jeu.

Un jeu répété est défini par la répétition sur le long terme du même jeu d'étape. Dans ce cas, les stratégies des joueurs dépendent des actions choisies aux étapes précédentes. Les gains d'un jeu répété sont définis par une moyenne sur les gains de chaque étape du jeu. La notion d'équilibre s'étend au jeu répété en considérant les stratégies dépendantes du passé et les gains moyennés. La répétition introduit de l'information supplémentaire et permet d'augmenter les espaces de stratégies et les ensembles d'équilibre. Les solutions d'équilibre que propose la théorie des jeux répétés sont étroitement reliées aux hypothèses sur l'information dont disposent les joueurs au moment de choisir leur action. Ces informations concernent le nombre de joueurs, la durée du jeu, les espaces d'actions, les fonctions d'utilité et les actions passées. Lorsque les joueurs ne connaissent pas exactement les fonctions d'utilité, le jeu est appelé "jeu à information incomplète". Lorsque les joueurs n'observent pas parfaitement les actions choisies précédemment par les autres joueurs, le jeu est appelé "jeu à observation imparfaite". Les

résultats d'équilibre proposés par la théorie des jeux diffèrent totalement suivant l'information que possèdent les joueurs avant de jouer. Lorsque l'observation des actions passées n'est pas parfaite, les stratégies d'équilibre sont difficiles à construire et l'ensemble des utilités correspondantes reste inconnu à ce jour.

La théorie de l'information étudie les performances d'un système communicant. Un tel système est composé de sources d'informations, d'émetteurs, de canaux de transmission et de destinataires. Pour les communications sans-fil, les techniques d'émission dépendent des paramètres physiques tels que l'amplitude, la fréquence, la phase et la superposition des ondes électromagnétiques. Les communications sont rendues possibles en utilisant ces paramètres de manière appropriée pour transporter de l'information. De nos jours, la quantité des données traitées par les systèmes de communication est de plus en plus importante et l'ensemble des utilisateurs des systèmes communicants est de plus en plus dense. Les futurs réseaux ne pourront plus s'organiser autour d'un unique opérateur central qui impose des techniques d'émissions à chaque appareil. La multiplication des paramètres et la complexité des solutions posent des problèmes d'optimisation difficiles à résoudre. Une idée pertinente pour remédier à ces problèmes est d'organiser le traitement de l'information localement.

Récemment, la théorie des jeux a permis d'apporter des réponses convaincantes aux problèmes rencontrés dans les communications sans-fil. Les modèles que propose la théorie des jeux considèrent que les paramètres techniques tels que la puissance d'une onde, l'allocation de ressources ou les protocoles de réseaux, sont optimisés localement par les appareils communicants. Un réseau est dit "décentralisé" si les unités qui le constituent choisissent certains paramètres de manière autonome, afin d'améliorer l'efficacité locale de la communication. Nos recherches en télécommunication ont pour objectif de caractériser les comportements des appareils et du réseau qui sont fiables, prévisibles et qui garantissent un fonctionnement optimal. Le concept d'équilibre de Nash garantit une propriété de stabilité pour les réseaux de communication décentralisés. À l'équilibre, aucun appareil n'est incité à changer de stratégie d'émission afin d'augmenter la qualité ou la quantité de sa propre communication. À l'aide des différentes notions d'équilibre étudiées en théorie des jeux, un large panel de solutions permet de garantir une condition de stabilité et de prédire le comportement du système.

Cette thèse exploite les complémentarités qui existent entre la théorie de l'information et la théorie des jeux. *D'une part*, la théorie des jeux permet de prédire le comportement d'un réseau de communication dans lequel les paramètres techniques sont choisis localement. Au chapitre 3, nous considérons que les appareils communicants sont des joueurs et que les puissances d'émission des ondes sont des actions. Les utilités sont évaluées grâce aux débits de communication que procurent les puissances d'ondes choisies par les émetteurs. Nous proposons plusieurs stratégies de communication qui satisfont une condition d'équilibre de Nash. *D'autre part*, la théorie de l'information permet d'analyser les mécanismes sous-jacents qui garantissent la circulation de l'information parmi des joueurs. Lorsque ces derniers n'observent pas les actions passées de manière par-

faite, l'ensemble des utilités d'équilibre n'est pas connu. Nos travaux considèrent ici un modèle général et s'orientent en suivant deux axes de recherche. Le premier est présenté au chapitre 4 et consiste à envoyer un signal supplémentaire aux joueurs afin qu'ils observent parfaitement les actions passées. Le second est présenté au chapitre 5 et consiste à utiliser la théorie de l'information pour approfondir l'étude des stratégies d'équilibre lorsque les actions passées ne sont pas observées parfaitement. Ces deux directions sont à leur tour exploitées afin de modéliser des réseaux de communication plus réalistes et d'y apporter des solutions nouvelles.

1.2 Objectifs de la thèse

Initialement, nous nous sommes intéressés au jeu du contrôle de puissance du signal émis pour un canal à accès multiples où les émetteurs maximisent l'efficacité énergétique de leur propre transmission [45]. Dans ce modèle, la puissance d'émission d'un utilisateur altère la communication des autres utilisateurs. Notre première contribution fut d'introduire un modèle de jeu répété avec des hypothèses réalistes sur l'information dont disposent les joueurs. Les résultats obtenus ont permis de dégager un gain significatif par rapport aux études précédentes. La formulation du jeu répété est peu fréquente dans la littérature des communications. Les résultats sont pourtant très encourageants. Au cours de ces trois années, nous nous sommes également focalisés sur l'étude des observations dont disposent les joueurs, à propos des actions passées. Le problème des jeux répétés avec observation imparfaite des actions passées est fondamental pour étudier les systèmes communicants réalistes. Pour le jeu du contrôle de puissance, nos résultats ne sont efficaces qu'à condition que les joueurs observent les actions passées avec une précision suffisante. Nous avons décidé d'étudier les problèmes d'information stratégique dans les jeux en utilisant le point de vue de la théorie de l'information, ou plus particulièrement, la théorie de Shannon. Au cours de ces trois années, nous avons développé deux axes de recherches pour parer aux problèmes de l'observation imparfaite des actions passées des joueurs. Le premier consiste à introduire une structure de signaux supplémentaires afin de permettre aux joueurs d'observer les actions passées avec une précision suffisante pour garantir une condition d'équilibre. Le second consiste à étudier les structures d'observation à travers les résultats de codage [36]. L'observation des actions passées à travers une structure d'observation offre aux joueurs la possibilité de mettre en œuvre certaines corrélations entre les suites d'actions.

Les travaux présentés dans ce document illustrent le lien qui existe entre la théorie des jeux avec observation imparfaite des actions passées et la théorie de l'information. Les outils de la théorie de l'information permettent de résoudre des problèmes de théorie des jeux qui, à leur tour, permettent de résoudre des problèmes rencontrés dans les communications. La problématique de cette thèse est résumée par le problème 1.1.

Problématique 1.1 Lorsque, dans un jeu répété, les joueurs observent les actions pas-

sées de manière imparfaite, alors la caractérisation de l'ensemble des utilités d'équilibre est un problème non-résolu.

La portée de cette problématique dépasse le cadre de la théorie de l'information. En effet, elle concerne tous les domaines où la théorie des jeux répétés est appliquée alors que l'observation des joueurs est imparfaite. Ce document n'a pas la prétention de résoudre ce problème difficile, sinon d'y apporter certains éléments de réponse. Le premier est que la théorie de l'information paraît incontournable pour l'étude des conditions d'équilibre lorsque les joueurs observent les actions passées à travers un canal d'observation. Le second est que l'optimalité au sens de Pareto, d'une solution d'équilibre peut être améliorée significativement lorsque les joueurs observent plus précisément les actions passées.

1.3 Structure du manuscrit

La trame générale de ce manuscrit suit les évolutions chronologiques de nos recherches. Pour plus de clarté, les contributions sont regroupées en cinq thèmes développés au cours de quatre chapitres. La teneur des contributions est rappelée à la section 1.4 et les publications correspondantes sont présentées dans la section 1.5. Deux revues de la littérature concernant les jeux répétés et la théorie de Shannon sont présentées au chapitre 2 et en annexe A. Le chapitre 3 illustre la problématique 1.1 en considérant un jeu de contrôle de puissance avec observation imparfaite des actions passées. Ce modèle nous permet d'illustrer les compromis qui existent entre la précision des observations et l'optimalité des solutions d'équilibre. Ensuite, nous proposons deux directions complémentaires développées aux chapitres 4 et 5. Au chapitre 4, nous étudions une structure de signaux supplémentaires qui permet de reconstruire l'observation des joueurs. Au chapitre 5, nous étudions les possibilités de coordination qu'autorise une structure d'observation des actions passées.

La structure détaillée du manuscrit est présentée comme suit :

- Le chapitre 2 est consacré aux résultats de la théorie des jeux sur lesquels sont basés nos travaux. Lorsque l'observation des joueurs est parfaite, section 2.4, les théorèmes Folk 2.13, 2.10 et 2.8 caractérisent l'ensemble des utilités d'équilibre. Lorsque les joueurs observent les actions passées à travers un canal d'observation, section 2.5, alors la caractérisation des utilités d'équilibre n'est pas résolue. Dans un premier temps (chapitre 3), nous utilisons les résultats disponibles dans la littérature pour résoudre des problèmes des réseaux de communication décentralisés. Dans un second temps (chapitres 4 et 5), nous approfondissons l'étude des résultats d'équilibre à l'aide des outils issus de la théorie de l'information lorsque l'observation des actions passées n'est pas parfaite

- Le chapitre 3 est consacré à l'étude du contrôle de puissance décentralisé pour un canal à accès multiples. Le modèle de canal étudié est présenté à la section 3.2, où plusieurs utilisateurs transmettent simultanément des informations à une station de base. L'interaction entre les utilisateurs provient de l'interférence créée par l'addition des signaux sur le même canal. Les résultats disponibles dans la littérature sont présentés aux sections 3.3 et 3.4 et correspondent aux caractérisations de l'équilibre de Nash du jeu en un coup et de celui du jeu de Stackelberg. À la section 3.5, nous introduisons un modèle de jeu répété. Les joueurs n'observent pas directement les actions passées mais observent un signal appelé le "rapport signal sur interférence plus bruit" et noté RSIB. Nous montrons que ce signal est suffisant pour mettre en œuvre des stratégies d'équilibre qui procurent une utilité optimale pour le système. La section 3.6 est consacrée à l'extension de ces résultats et fournit la caractérisation générale des utilités d'équilibre, lorsque le signal RSIB est observé et que les gains des canaux sont constants ou varient d'un bloc de transmission à l'autre. Les illustrations numériques et la conclusion sont présentées aux sections 3.7 et 3.8. Les résultats des sections 3.5 et 3.6 sont regroupés sous le terme de "première contribution". Nous présentons un compromis optimal entre les hypothèses sur l'information dont disposent les joueurs et l'optimalité des solutions d'équilibre existantes.
- Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la reconstruction d'une structure d'observation. Considérons le jeu répété où les joueurs n'observent pas les actions passées de manière parfaite. Un encodeur est chargé d'envoyer aux joueurs un signal supplémentaire afin qu'ils observent parfaitement les actions passées. Ce problème nous permet de revisiter le codage de source avec information adjacente et d'exhiber de nouvelles contraintes d'information. La section 4.2 étudie la reconstruction, en une étape, de l'observation parfaite. Nous caractérisons les structures d'observation des joueurs et de l'encodeur qui autorisent la reconstruction de l'observation parfaite. Ensuite, nous caractérisons le signal supplémentaire envoyé par l'encodeur pour lequel la cardinalité de l'ensemble des symboles est minimale. La section 4.3 étudie la reconstruction en une étape de l'observation presque parfaite. À travers cette structure, les joueurs observent l'action jouée précédemment avec une probabilité d'erreur faible mais positive. La caractérisation des utilités d'équilibre est disponible dans [40] lorsque les joueurs observent les actions passées avec une probabilité d'erreur suffisamment faible. Nous fournissons des conditions suffisantes sur les structures d'observation des joueurs et de l'encodeur pour que la reconstruction de l'observation presque parfaite soit possible. Nous proposons à l'encodeur d'envoyer un signal supplémentaire de cardinalité réduite qui permet aux joueurs de reconstruire l'observation presque parfaite. Les résultats des sections 4.2 et 4.3 sont regroupés au sein de la "seconde contribution" et sont appliqués au jeu du contrôle de puissance étudié au chapitre 3. La section 4.4 présente un schéma de reconstruction asymptotique

de l'observation parfaite. Ce codage est basé sur l'étude des sources d'information aux variations arbitraires. L'encodeur observe une suite d'actions qu'il représente par un message reçu par un joueur. L'objectif de ce codage est de minimiser le débit moyen de suites d'actions envoyées au joueur en tenant compte des variations éventuelles créées par les autres joueurs sur les suites d'actions. Le modèle de source aux variations arbitraires est approprié puisque les joueurs ne sont pas obligés de choisir leur propre action suivant un processus stochastique fixé à l'avance. Notre "troisième contribution" consiste à caractériser le débit optimal de cette source d'information particulière en considérant deux situations. La première suppose que le joueur qui décode, observe seulement le message envoyé par l'encodeur alors que la seconde suppose qu'il observe également une suite d'informations adjacentes, générée par un canal d'observation. En guise d'exemple, les débits de source optimaux sont évalués pour le jeu du contrôle de puissance étudié au chapitre 3.

- Le chapitre 5 est consacré à l'étude d'un canal multi-utilisateurs qui permet de donner une borne supérieure sur les niveaux de punitions qu'un groupe de joueurs peut imposer à un autre joueur. À la section 5.2, nous étudions un canal de diffusion avec un encodeur, deux récepteurs et un espion. La distribution de probabilités sur les sorties du canal dépend de deux états, dont les suites de réalisations sont connues par l'encodeur et les décodeurs. La "quatrième contribution" de cette thèse consiste à proposer, au théorème 5.6, une région atteignable pour les débits d'information que l'encodeur peut envoyer aux deux décodeurs sans que l'espion ne puisse inférer le ou les messages envoyés. La région des débits proposée n'est pas complète puisque certains problèmes ouverts, comme celui du canal de diffusion ou celui du canal sur écoute avec états, sont contenus dans notre problème. La section 5.3 présente une étude du canal de diffusion sur écoute avec des états asymétriques dans le cas gaussien. Nous évaluons la région des débits réalisables et nous illustrons nos résultats par des simulations numériques. La région des débits réalisables s'étend lorsque la variance ou la corrélation des états du canal augmente. La section 5.4 utilise le résultat d'atteignabilité du théorème 5.6 pour approfondir l'étude des utilités d'équilibre dans un jeu répété avec observation imparfaite. Les joueurs observent les actions passées à travers un canal d'observation qui envoie des signaux privés. Un groupe de joueurs souhaite coordonner ses actions, sans qu'un joueur opposant ne puisse découvrir la suite des réalisations futures. Nous considérons que le groupe des joueurs (l'encodeur et les décodeurs) communique à travers le canal d'observation en utilisant ses actions sans que le joueur opposant (l'espion) ne puisse inférer les messages envoyés. Nous appliquons les résultats présentés à la section 5.2, pour étudier le problème des niveaux de punitions dans un jeu répété lorsque l'observation des actions passées est imparfaite. En effet, les niveaux de punitions (niveaux min-max) qu'un groupe de joueurs peut imposer à un autre joueur, dépendent des corrélations

qui peuvent être secrètement mises en œuvre entre les joueurs. Nous utilisons le résultat de codage canal, combiné avec le codage de source de Shannon afin de caractériser les suites d'entrées, de sorties et d'états qui sont réalisables à travers le canal d'observation des joueurs. Ceci nous donne un ensemble de corrélations que peuvent générer les joueurs sur les actions. Nous fournissons une borne supérieure sur les niveaux de punitions à long terme qu'un groupe de joueurs peut mettre en œuvre. Les résultats de ces sections sont regroupés sous le terme de "cinquième contribution".

- L'annexe A est consacrée à la présentation des résultats fondamentaux de la théorie de Shannon. Les définitions d'entropie et d'information mutuelle ainsi que les propriétés usuelles sont rappelées à la section A.1. Les suites typiques ainsi que leurs propriétés relatives, notamment le lemme A.14, sont présentées à la section A.2. Les résultats du codage de source, de canal ou de source-canal conjoint sont rappelés aux sections A.3, A.4 et A.5. Sont présentés aux sections A.6, A.7 et A.8, les résultats du codage de source avec information adjacente au décodeur, du codage canal avec information adjacente à l'encodeur et du codage source-canal conjoint avec les informations adjacentes correspondantes. Le résultat d'atteignabilité pour le canal de diffusion est présenté à la section A.9 et le théorème de codage du canal sur écoute est présenté à la section A.10.
- La conclusion 6 présente un résumé des problèmes étudiés dans cette thèse et des contributions apportées. Nous proposons plusieurs extensions à ces travaux, basées sur l'exploitation des relations étroites qui existent entre la théorie des jeux et la théorie de l'information.

1.4 Contributions

Les cinq contributions principales de ces trois années de thèse sont organisées en quatre chapitres.

- La première contribution est présentée à la section 3 et concerne l'étude du jeu de contrôle de puissance dans un réseau de communication décentralisé. Les joueurs sont des émetteurs qui maximisent l'efficacité énergétique de leur propre communication. Nous proposons une approche basée sur la théorie des jeux répétés avec observation imparfaite des actions passées. Nous caractérisons des stratégies d'équilibre ainsi que les régions des utilités d'équilibre.
 - ★ Le théorème 3.11 propose une stratégie d'équilibre implémentable qui atteint une utilité Pareto-optimale pour le jeu du contrôle de puissance répété fini.
 - ★ Le théorème 3.12 propose une stratégie d'équilibre implémentable qui atteint une utilité Pareto-optimale pour le jeu du contrôle de puissance répété es-

compté.

- ★ Le théorème 3.14 caractérise la région des utilités d'équilibre pour le jeu du contrôle de puissance répété escompté lorsque les gains des canaux sont constants.
- ★ Le théorème 3.18 caractérise la région des utilités d'équilibre pour le jeu du contrôle de puissance répété escompté lorsque les gains des canaux suivent un processus stochastique.

Ces résultats sont publiés dans :

[77] M. Le Treust and S. Lasaulce. "A repeated game formulation of energy-efficient decentralized power control". IEEE Trans. on Wireless Commun., 9(9) :2860–2869, Sept. 2010.

- La deuxième contribution est présentée à la section 4 et concerne la reconstruction d'une structure d'observation dans un jeu répété avec observation imparfaite. Les joueurs observent les actions passées à travers un canal d'observation. Un encodeur supplémentaire renvoie un signal supplémentaire aux joueurs afin qu'ils observent plus précisément les actions jouées par le passé.
 - ★ Le théorème 4.8 caractérise l'ensemble des canaux d'observation pour l'encodeur et pour un joueur, qui autorisent la reconstruction de l'observation parfaite. Si les conditions que nous proposons sont vérifiées, alors l'encodeur est capable d'envoyer un signal supplémentaire au joueur afin qu'il observe parfaitement l'action jouée à l'étape précédente.
 - ★ Le théorème 4.10 caractérise le signal supplémentaire de cardinalité minimale que l'encodeur doit envoyer au joueur afin qu'il observe parfaitement l'action jouée à l'étape précédente.
 - ★ Le théorème 4.15 caractérise l'ensemble des canaux d'observation pour l'encodeur et pour un groupe de joueurs, qui autorisent la reconstruction de l'observation parfaite. Si les conditions que nous proposons sont vérifiées, alors l'encodeur est capable d'envoyer un signal supplémentaire à tous les joueurs afin qu'ils observent parfaitement l'action jouée à l'étape précédente.
 - ★ Le théorème 4.16 caractérise le signal supplémentaire de cardinalité minimale que l'encodeur doit envoyer à tous les joueurs afin qu'ils observent parfaitement l'action jouée à l'étape précédente.
 - ★ Le théorème 4.26 propose un ensemble des canaux d'observation pour l'encodeur et pour un groupe de joueurs, qui autorisent la reconstruction de l'observation presque parfaite.
 - ★ Le théorème 4.27 propose le signal supplémentaire de cardinalité réduite que l'encodeur doit envoyer à tous les joueurs afin qu'ils observent presque parfaitement l'action jouée à l'étape précédente.

Ces résultats sont publiés dans :

[79] Le Treust, M. and Lasaulce, S., *The price of re-establishing almost perfect monitoring in games with arbitrary monitoring structures*, ACM Proc. of the 4th

International Workshop on Game Theory in Communication Networks (GAME-COMM11), Cachan (Paris), France, 2011.

- La troisième contribution est présentée à la section 4 et concerne la reconstruction asymptotique d'une structure d'observation parfaite dans un jeu répété avec observation imparfaite. Un encodeur utilise le codage pour les sources d'information aux variations arbitraires afin de caractériser le débit optimal d'une source où les informations sont les actions des joueurs.
 - ★ Le théorème 4.31 caractérise le débit optimal d'une source pour laquelle les informations sont les actions des joueurs.
 - ★ Le théorème 4.37 caractérise le débit optimal d'une source pour laquelle les informations sont les actions des joueurs lorsque le décodeur possède une information adjacente.

Ces résultats sont publiés dans :

[80] Le Treust, M. and Lasaulce, S., *Resilient Source Coding*, IEEE Proc. of the international conference on network games, control and optimization (NETG-COOP11), (Paris) 2011.

- La quatrième contribution est présentée à la section 5 et concerne l'étude des performances d'un canal multi-utilisateurs. Nous fournissons une région des débits réalisables pour un canal de diffusion sur écoute avec états connus de manière asymétrique par les décodeurs.
 - ★ Le théorème 5.6 fournit une région des débits réalisables à travers le canal de diffusion sur écoute avec états asymétriques.
 - ★ Le théorème 5.9 fournit une région des débits réalisables pour la version gaussienne du même canal.

Ces résultats sont publiés dans :

[82] Le Treust, M. and Zaidi, A. and Lasaulce, S., *An Achievable Rate Region for the Broadcast Wiretap Channel with Asymmetric Side Information*, IEEE Proc. of the 49th Allerton conference, Monticello, Illinois, 2011.

- La cinquième contribution est présentée à la section 5 et concerne les niveaux de punitions dans un jeu répété avec observation imparfaite. Le canal d'observation peut être utilisé par les joueurs afin de coordonner les futures suites d'actions. Le résultat d'atteignabilité pour le canal de diffusion sur écoute avec états asymétriques permet de donner une borne supérieure sur les niveaux min-max.
 - ★ Le théorème 5.16 présente un résultat d'atteignabilité pour le codage source-canal conjoint basé sur les débits de canal réalisables, donnés par le théorème 5.6 et les débits de source donnés par Shannon [65].
 - ★ Le théorème 5.18 permet de caractériser les suites d'actions corrélées que les joueurs peuvent mettre secrètement en œuvre à travers le canal d'observation. Ce résultat fournit une borne supérieure sur les niveaux de punitions, les ni-

veaux min-max, qu'un groupe de joueurs peut imposer à un autre joueur. Ces résultats ont été présentés à la conférence "Games Toulouse 2011".

1.5 Publications

1.5.1 Revues internationales

- [77] Le Treust, M. and Lasaulce, S., *A repeated game formulation of energy-efficient decentralized power control*, IEEE Trans. on Wireless Communications, volume : 9, issue : 9, pages : 2860 - 2869, september 2010.
- Le Treust, M. and He, G. and Lasaulce, S. and Hayel, Y., *Green power control in cognitive wireless networks*, 2011, en préparation pour IEEE Trans. on Vehicular Technology.
- Le Treust, M. and Lasaulce, S., *Resilient source coding*, 2011, invité pour Dynamics Games and Application Journal.

1.5.2 Congrès internationaux avec comité de lecture et actes

- [80] Le Treust, M. and Lasaulce, S., *Resilient Source Coding*, IEEE Proc. of the international conference on network games, control and optimization (co-best paper at NETGCOOP11), (Paris) 2011.
- [82] Le Treust, M. and Zaidi, A. and Lasaulce, S., *An Achievable Rate Region for the Broadcast Wiretap Channel with Asymmetric Side Information*, IEEE Proc. of the 49th Allerton conference, Monticello, Illinois, 2011.
- [51] Meriaux, F. and Le Treust, M. and Lasaulce, S. and Kieffer, M., *Energy-efficient power control strategies for stochastic games*, IEEE Proc. of the 17th International Conference on Digital Signal Processing (DSP11), 2011.
- [79] Le Treust, M. and Lasaulce, S., *The price of re-establishing almost perfect monitoring in games with arbitrary monitoring structures*, ACM Proc. of the 4th International Workshop on Game Theory in Communication Networks (GAMECOMM11), Cachan (Paris), France, 2011.
- [74] Le Treust, M. and Hayel, Y. and Lasaulce, S. and Debbah. M., *To Sense or not to Sense in Energy-Efficient Power Control Games*, IEEE Proc. of the 2th International Conference on Game Theory for Network (GAMENETS11), Shanghai, China, 2011.
- [46] Le Treust, M. and Tembine, H. and Lasaulce, S. and Debbah, M., *Coverage games in small cells networks*, IEEE Proc. of the Future Network and Mobile Summit (FURNEMS10), Florence, Italy, 2010.

- [76] Le Treust, M. and Lasaulce, S. and Debbah, M., *Implicit cooperation in distributed energy-efficient networks*, IEEE Proc. of the 4th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP10), Limassol, Cyprus, 2010.
- [9] Bennis, M. and Le Treust, M. and Lasaulce, S. and Debbah, M., *Spectrum sharing games in the interference channel*, IEEE Proc. of the 1st International Conference on Game Theory for Network (GAMENETS09), Istanbul, Turkey, 2009.

1.5.3 Congrès nationaux avec comité de lecture et actes

- [52] Meriaux, F. and LeTreust, M. and Lasaulce, S. and Kieffer, M., *Jeux stochastiques et contrôle de puissance distribué*, Actes de la Conférence du Groupement de Recherche en Traitement du Signal et des Images (GRETSI11), Bordeaux, France, 2011.
- [78] Le Treust, M. and Lasaulce, S. , *Codage de Source Stratégique avec Information Adjacente au Décodeur*, Actes de la Conférence du Groupement de Recherche en Traitement du Signal et des Images (GRETSI11), Bordeaux, France, 2011.
- [21] Debbah, M. and Lasaulce, S. and LeTreust, M. and Tembine, H. , *Contrôle de puissance dynamique pour les communications sans fils*, Actes de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF10), 2010.
- [75] Le Treust, M. and Lasaulce, S., *Approche bayésienne pour le contrôle de puissance décentralisé efficace énergétiquement*, Actes de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF10), 2010.
- [81] Le Treust, M and Medina Perlaza, S. and Lasaulce, S., *Contrôle de puissance distribué efficace énergétiquement et jeux répétés*, Actes de la Conférence du Groupement de Recherche en Traitement du Signal et des Images (GRETSI09), Dijon, France, 2009.

Chapitre 2

Jeux répétés avec signaux et théorème Folk

2.1 Description et résultats principaux

Ce chapitre présente les résultats de la littérature de théorie des jeux que nous utilisons dans ce manuscrit. Les jeux répétés apportent des solutions optimales en termes d'utilité à condition que l'observation des joueurs soit suffisamment précise. Dans le cas contraire, les stratégies d'équilibre et l'ensemble des utilités correspondantes n'est pas connu. Pour introduire ce chapitre, nous présentons le jeu du "dilemme du prisonnier" à la section 2.2. Les utilités d'équilibre sont caractérisées pour le jeu en un coup et pour le jeu répété lorsque les actions passées sont parfaitement observées. Dans la section 2.3, nous présentons le modèle du jeu en un coup et les notions de stratégies d'équilibre et de Pareto-optimalité. Dans la section 2.4, nous formalisons le modèle des jeux répétés avec observation parfaite pour une durée infinie, aléatoire et finie. Dans la section 2.5, nous présentons le problème général du théorème Folk avec observation imparfaite ainsi que quatre résultats de caractérisation pour des structures d'observation particulières. Dans la section 2.6, nous présentons les démonstrations des théorèmes Folk lorsque l'observation des actions passées est parfaite.

2.2 Théorème Folk pour le "dilemme du prisonnier"

Le "dilemme du prisonnier" est un jeu à deux joueurs. Chacun possède une action de "coopération" C et une action de "trahison" T . Les fonctions d'utilité associent un paiement à chaque paire d'actions et sont données par le tableau de la figure 2.1. Le joueur J_1 choisit la ligne et le joueur J_2 choisit la colonne. Les utilités $(4, 0)$ signifient que le joueur J_1 obtient un gain de 4 alors que le joueur J_2 obtient un gain de 0. L'équilibre de

Nash correspond à un couple d'actions pour laquelle aucune déviation unilatérale (d'un seul joueur) n'est profitable. Les gains de la stratégie de "coopération" C sont inférieurs à ceux de la stratégie de "trahisons" et ce, quoi que fasse l'autre joueur. La stratégie C est donc une stratégie dominée et l'unique équilibre de Nash de ce jeu est le couple de stratégies de "trahison" (T, T) . Ce jeu est appelé le "dilemme" car l'utilité à l'équilibre de Nash $(1, 1)$ est moins profitable pour chacun des joueurs que l'utilité de "coopération" $(3, 3)$. Le fait de répéter le même jeu sur une longue période permet de changer les

	C	T
C	3, 3	0, 4
T	4, 0	1, 1 ★

FIGURE 2.1 – Matrice des utilités du "dilemme du prisonnier" où l'équilibre est noté "★".

comportements stratégiques. Ainsi, la stratégie "je coopère en jouant C tant que l'autre joueur coopère (C) et je le punis indéfiniment en jouant T , dès qu'il me trahit (T)" est une stratégie d'équilibre du jeu répété. Le gain d'étape que procure une déviation unilatérale est compensé par les pertes futures imposées par l'autre joueur. Cette stratégie d'équilibre du jeu répété permet d'obtenir les utilités $(3, 3)$. Dans la figure 2.2, le point encerclé représente l'utilité de l'équilibre de Nash du jeu en un coup $(1, 1)$ et la partie grisée représente les utilités d'équilibre de Nash du jeu répété. Le théorème Folk (voir le théorème 2.8) caractérise les utilités d'équilibre des jeux répétés de long terme. L'orthant positif au point $(1, 1)$ représente les utilités individuellement rationnelles, notées IR , et le losange représente les utilités réalisables, notées $u(\Delta(\mathcal{A}))$, pour le jeu répété infini (voir la définition 2.7). Le théorème Folk établit que l'ensemble des utilités d'équilibre du jeu répété est la partie grisée de la figure 2.1. Ceci nous permet d'obtenir à l'équilibre, des utilités optimales au sens de Pareto (voir la définition 2.5). La condition primordiale pour obtenir ce résultat est que chaque joueur observe parfaitement les actions passées des autres joueurs. Dans le cas contraire, la caractérisation des utilités d'équilibre dans le jeu répété est un problème ouvert depuis plusieurs décennies.

2.3 Modèle du jeu en un coup

Définissons le jeu en un coup $G = (\mathcal{K}, (\mathcal{A}_k)_{k \in \mathcal{K}}, (u_k)_{k \in \mathcal{K}})$ avec K joueurs :

- un ensemble de joueurs \mathcal{K} ,
- un ensemble d'actions \mathcal{A}_k , pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$,
- une fonction d'utilité $u_k : \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_k \mapsto \mathbb{R}$, pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$.

Chacun des joueurs choisit indépendamment et simultanément une action a_k parmi son ensemble d'actions \mathcal{A}_k . Si $a = (a_1, \dots, a_K) \in \mathcal{A} = \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_k$ est l'action conjointe sé-

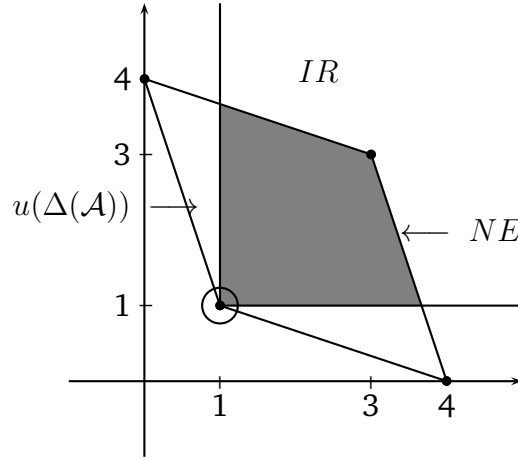


FIGURE 2.2 – $u(\Delta(\mathcal{A}))$ représente l'ensemble des utilités réalisables pour le jeu répété Γ , IR représente l'ensemble des utilités individuellement rationnelles. L'intersection de ces deux ensembles (partie grisée) représente la région des utilités d'équilibre du jeu répété. L'utilité cerclée est celle de l'équilibre de Nash du jeu en un coup.

lectionnée, l'utilité du joueur $k \in \mathcal{K}$ est $u_k(a)$. Notons $a_{-k} = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_K) \in \mathcal{A}_{-k} = \prod_{j \neq k} \mathcal{A}_j$ le vecteur des actions de tous les joueurs excepté du joueur $k \in \mathcal{K}$.

2.3.1 Équilibre de Nash du jeu en un coup G

Dans le jeu en un coup, un vecteur d'actions est appelé un profil de stratégies pures. Le célèbre équilibre de Nash, défini dans [54], est un profil de stratégies pures pour lequel aucune déviation unilatérale n'est profitable.

Définition 2.1 Un profil de stratégies pures $a^* = (a_k^*)_{k \in \mathcal{K}} \in \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_k$ est un équilibre de Nash de G si :

$$u_k(a'_k, a_{-k}^*) \leq u_k(a_k^*, a_{-k}^*), \quad \forall a'_k \in \mathcal{A}_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad (2.1)$$

Certains jeux matriciels, notamment certains jeux à somme nulle, ne possèdent aucun équilibre de Nash en stratégie pure. Les stratégies mixtes permettent de remédier à ce problème en introduisant des probabilités sur les actions.

Définition 2.2 Une stratégie mixte $p_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ pour le joueur $k \in \mathcal{K}$ est une distribution de probabilité sur les actions \mathcal{A}_k du joueur $k \in \mathcal{K}$. Notons $p_{-k} = (p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_K) \in \prod_{j \neq k} \Delta(\mathcal{A}_j)$ le vecteur des actions mixtes de tous les joueurs excepté du joueur $k \in \mathcal{K}$.

Le concept d'équilibre de Nash s'étend aux stratégies mixtes lorsque les joueurs choisissent leur action avec une distribution de probabilités. Les utilités des joueurs sont évaluées en termes d'utilités espérées.

Définition 2.3 Un profil de stratégies mixtes $p = (p_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \prod_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k)$ est un équilibre de Nash de G si :

$$\mathbb{E}_{q_k, p_{-k}^*} u_k(a_k, a_{-k}) \leq \mathbb{E}_{p_k^*, p_{-k}^*} u_k(a_k, a_{-k}), \quad \forall q_k \in \Delta(\mathcal{A}_k), \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad (2.2)$$

Le théorème de Nash [54] assure l'existence d'au moins un équilibre en stratégies mixtes pour tous les jeux finis.

Théorème 2.4 (Nash [54]) *Un jeu fini possède un nombre de joueurs K fini et des espaces d'actions finis $|\mathcal{A}_k| < \infty, \forall k \in \mathcal{K}$. Tout jeu fini admet au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Notons E l'ensemble des utilités d'équilibre de Nash du jeu en un coup. Afin d'évaluer l'efficacité d'une solution, nous introduisons le concept d'optimalité au sens de Pareto et l'optimalité sociale.

Définition 2.5 Considérons deux vecteurs d'utilité $U = (U_1, \dots, U_K)$ et $U' = (U'_1, \dots, U'_K)$.

- L'utilité U Pareto-domine U' si pour chaque composante : $U'_k \leq U_k, \forall k \in \mathcal{K}$.
- L'utilité U est Pareto-optimale si aucune autre utilité U' ne Pareto-domine U .
- L'utilité U est l'optimum social si U maximise l'utilité sociale, i.e. la somme de utilités, $\max_{U \in \mathcal{U}} \sum_{k \in \mathcal{K}} U_k$.

2.4 Jeu répété avec observation parfaite

2.4.1 Modèle du jeu répété Γ avec observation parfaite

Le jeu répété, noté Γ , est constitué d'un ensemble d'étapes au cours desquelles les joueurs interagissent à travers le même jeu G . Lorsque l'on répète le jeu en un coup sur une durée suffisamment longue, l'ensemble NE des utilités d'équilibre s'élargit : $E \subset NE$. La répétition autorise les joueurs à se coordonner et à mettre en place des menaces crédibles pour parer aux éventuelles déviations. Ce modèle permet d'analyser les interactions de long terme et de caractériser les stratégies et les équilibres qui prennent en compte l'histoire du jeu (voir les théorèmes Folk 2.8, 2.10 et 2.13). La durée du jeu peut être finie, infinie ou aléatoire.

- L'ensemble des histoires du jeu, noté $H = \mathcal{A}^\infty$ est l'ensemble des suites d'actions conjointes du jeu répété : $h = ((a_k^1)_{k \in \mathcal{K}}, \dots, (a_k^t)_{k \in \mathcal{K}}, \dots)$.

- L'ensemble des histoires du jeu à l'étape t , noté $H^t = \mathcal{A}^{\times t-1}$ est l'ensemble des suites d'actions conjointes jusqu'à l'étape $t - 1$ du jeu répété : $h^t = ((a_k^1)_{k \in \mathcal{K}}, \dots, (a_k^{t-1})_{k \in \mathcal{K}})$.
- Une stratégie pure du joueur $k \in \mathcal{K}$ est une suite de fonctions $(\tau_k^t)_{t \geq 1}$ avec $\forall t \geq 1$, $\tau_k^t : H^t \mapsto \mathcal{A}_k$ qui prend une histoire $h^t \in H^t$ et associe une action pure $a_k \in \mathcal{A}_k$. Notons, \mathcal{T}_p l'ensemble de stratégies pures du jeu répété.
- Une stratégie mixte du joueur $k \in \mathcal{K}$ est une distribution de probabilité sur l'ensemble \mathcal{T}_p des stratégies pures.
- Une stratégie comportementale du joueur $k \in \mathcal{K}$ est une suite de fonctions $(\tau_k^t)_{t \geq 1}$ avec $\forall t \geq 1$, $\tau_k^t : H^t \mapsto \Delta(\mathcal{A}_k)$ qui prend une histoire $h^t \in H^t$ et associe une distribution sur les actions $p_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$. Contrairement aux stratégies précédentes, ce type de stratégies fait intervenir de l'aléatoire à chaque étape du jeu. Notons $\mathcal{T} = \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{T}_k$ l'ensemble des stratégies comportementales.
- Une stratégie générale du joueur $k \in \mathcal{K}$ est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies comportementales.

Un profil de stratégies comportementales $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathcal{T}$ induit naturellement une probabilité \mathcal{P}_τ sur H l'ensemble des histoires. Les joueurs ont une mémoire parfaite des actions passées et d'après le théorème de Kuhn [44], les stratégies mixtes de Γ induisent les mêmes probabilités sur les suites d'actions que les stratégies comportementales \mathcal{T} . Nous ne considérerons, par la suite, que des stratégies comportementales.

2.4.2 Jeu répété infini Γ^∞

Le jeu répété infini, noté Γ^∞ , est constitué d'une infinité d'étapes. Les fonctions d'utilité prennent en compte la durée infinie du jeu. Définissons l'espérance de la moyenne des utilités jusqu'à l'étape T associée à la stratégie $\tau \in \mathcal{T}$.

$$\gamma_k^T(\tau) = \mathbb{E}_{\mathcal{P}_\tau} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_k(a_t) \right), \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall T \geq 1. \quad (2.3)$$

Définition 2.6 Un profil de stratégies $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathcal{T}$ est un équilibre uniforme si :

- (i) $\forall k \in \mathcal{K}$, $(\gamma_k^T(\tau))_{T \geq 1}$ converge vers une limite $\gamma_k(\tau)$ quand $T \mapsto \infty$.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{T}$ tel que $\forall T \geq \bar{T}$, $\forall k \in \mathcal{K}$, $\forall \tau'_k \in \mathcal{T}_k$ $\gamma_k^T(\tau'_k, \tau_{-k}) \leq \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}) + \varepsilon$

Nous pourrions également définir les équilibres "upper", "lower" et "Banach" grâce à la \limsup , \liminf ou une limite de Banach (forme linéaire sur l'ensemble des suites bornées). Un point $x \in \mathbb{R}^N$ est une utilité d'équilibre de Nash s'il existe une stratégie conjointe $\tau \in \mathcal{T}$ qui soit un équilibre de Γ^∞ et qui procure une utilité égale à $x = \gamma(\tau)$. Notons NE^∞ l'ensemble des utilités d'équilibre de Nash. Naturellement $E \subset NE^\infty$.

2.4.2.1 Théorème Folk infini avec observation parfaite

Aumann dans [3] : "The Folk theorem has been generally known in the profession for at least 15 or 20 years, but has not been published, its authorship is obscure."

Le Folk théorème permet de caractériser, en observation parfaite, les équilibres de long terme à partir du jeu en un coup. Il garantit sous les mêmes hypothèses que celles du théorème de Nash (nombre de joueurs et ensemble d'actions finis) l'existence d'une multitude d'équilibres du jeu répété infini. Introduisons les définitions suivantes :

Définition 2.7 • L'ensemble des utilités réalisables, atteignables par des stratégies de long-terme est l'enveloppe convexe des utilités du jeu en un coup.

$$u(\Delta(\mathcal{A})) = \text{conv } u(\mathcal{A}). \quad (2.4)$$

- Chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ face à tous les autres peut garantir son niveau min-max v_k aussi appelé niveau de punition ou de défense :

$$v_k = \min_{p_{-k} \in \prod_{i \neq k} \Delta(\mathcal{A}_i)} \max_{p_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)} u_k(p_k, p_{-k}), \quad k \in \mathcal{K}. \quad (2.5)$$

- L'ensemble des utilités individuellement rationnelles sont celles qui Pareto-dominent (voir définition 2.5) les niveaux min-max :

$$IR = \{(x_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathbb{R}^N, x_k \geq v_k \quad \forall k \in \mathcal{K}\}. \quad (2.6)$$

Le théorème Folk caractérise les utilités d'équilibre à partir des utilités réalisables $u(\Delta(\mathcal{A}))$ et individuellement rationnelles IR .

Théorème 2.8 (Le théorème Folk infini [5], [61]) *L'ensemble des utilités d'équilibre uniforme du jeu répété infini Γ^∞ est égal à :*

$$NE^\infty = IR \cap u(\Delta(\mathcal{A})). \quad (2.7)$$

La preuve est donnée à la sous-section 2.6.1.

2.4.3 Jeu répété escompté Γ^λ

Le jeu répété escompté, noté Γ^λ , évalue les utilités de long-terme avec un facteur d'escompte $\lambda \in]0, 1]$. L'utilité du jour $u_k(a^t)$ pondère plus fortement l'utilité de long-terme $\gamma_k^\lambda(\tau)$ que le fait l'utilité d'une étape future $u_k(a^{t+1})$. Ce facteur d'escompte représente aussi la probabilité d'arrêt du jeu d'étape en étape. Définissons les utilités escomp-

tées avec le taux d'escompte $\lambda \in]0, 1]$:

$$\gamma_k^\lambda(\tau) = \mathbb{E}_{\mathcal{P}_\tau} \left(\sum_{t \geq 1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} u_k(a_t) \right), \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \lambda \in]0, 1]. \quad (2.8)$$

Définition 2.9 Un profil de stratégies $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathcal{T}$ est un équilibre du jeu répété escompté Γ^λ si :

$$\gamma_k^\lambda(\tau'_k, \tau_{-k}) \leq \gamma_k^\lambda(\tau_k, \tau_{-k}), \quad \forall \tau'_k \in \mathcal{T}_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (2.9)$$

Un point $x \in \mathbb{R}^N$ est une utilité d'équilibre de Nash s'il existe une stratégie conjointe τ qui soit un équilibre de Γ^λ et qui procure une utilité égale à $x = \gamma^\lambda(\tau)$. Notons NE^λ l'ensemble des utilités d'équilibre de Nash. Naturellement $E \subset NE^\lambda$.

2.4.3.1 Théorème Folk escompté avec observation parfaite

Théorème 2.10 (Le théorème Folk escompté [70]) Supposons que $K = 2$ ou qu'il existe un vecteur d'utilité $x \in IR \cap u(\Delta(\mathcal{A}))$ qui Pareto-domine les niveaux min-max : $v_k < x_k, \forall k \in \mathcal{K}$, alors l'ensemble des utilités d'équilibre converge lorsque λ tend vers 0.

$$NE^\lambda \longrightarrow IR \cap u(\Delta(\mathcal{A})), \text{ lorsque } \lambda \longrightarrow 0. \quad (2.10)$$

Remarque 2.11 La convergence sur les ensembles est définie par rapport à la distance de Hausdorff. Par exemple la distance de Hausdorff entre les ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} est définie comme suit :

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max(\max_{a \in \mathcal{A}} d(a, \mathcal{B}), \max_{b \in \mathcal{B}} d(\mathcal{A}, b)). \quad (2.11)$$

La preuve est donnée à la sous-section 2.6.2.

2.4.4 Jeu répété fini Γ^T

Les fonctions d'utilité du jeu répété fini en T étapes, noté Γ^T , sont définies grâce à l'espérance de la moyenne des utilités jusqu'à l'étape T associée à la stratégie τ :

$$\gamma_k^T(\tau) = \mathbb{E}_{\mathcal{P}_\tau} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_k(a_t) \right), \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall T \geq 1. \quad (2.12)$$

Définition 2.12 Un profil de stratégies $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathcal{T}$ est un équilibre de Γ^T si :

$$\gamma_k^T(\tau'_k, \tau_{-k}) \leq \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}), \quad \forall \tau'_k \in \mathcal{T}_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (2.13)$$

Un point $x \in \mathbb{R}^N$ est une utilité d'équilibre de Nash s'il existe une stratégie conjointe $\tau \in \mathcal{T}$ qui soit un équilibre de Γ^T et qui procure une utilité égale à $x = \gamma^T(\tau)$. Notons NE^T l'ensemble des utilités d'équilibre de Nash du jeu répété en T étapes. Naturellement $E \subset NE^T$.

2.4.4.1 Théorème Folk fini avec observation parfaite

Théorème 2.13 (Le théorème Folk fini [11]) Supposons qu'il existe un équilibre de Nash du jeu en un coup dont le vecteur d'utilité u^* vérifie la condition suivante :

$$v_k < u_k^*, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (2.14)$$

Alors, l'ensemble des utilités d'équilibre converge lorsque T tend vers $+\infty$.

$$NE^T \longrightarrow IR \cap u(\Delta(\mathcal{A})), \text{ as } T \longrightarrow +\infty. \quad (2.15)$$

Remarque 2.14 La convergence sur les ensembles est définie par rapport à la distance de Hausdorff (voir la remarque 2.11).

La preuve est donnée à la sous-section 2.6.3.

2.5 Jeu répété avec observation imparfaite

2.5.1 Modèle de jeu répété avec observation imparfaite

Le jeu répété avec observation imparfaite Γ est la répétition du même jeu d'étapes noté $G = (\mathcal{K}, (\mathcal{A}_k)_{k \in \mathcal{K}}, (u_k)_{k \in \mathcal{K}}, (\mathcal{S}_k)_{k \in \mathcal{K}}, \mathbb{T})$ avec :

- un ensemble de joueurs \mathcal{K} ,
- un ensemble d'actions \mathcal{A}_k , pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$,
- une fonction d'utilité $u_k : \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_k \mapsto \mathbb{R}$, pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$,

et un ensemble de signaux \mathcal{S}_k , pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ ainsi qu'une structure d'observation \mathbb{T} .

$$\mathbb{T} : \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_k \mapsto \Delta\left(\prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{S}_k\right). \quad (2.16)$$

Pour chaque action conjointe $a \in \mathcal{A}$, chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ reçoit un signal privé $s_k \in \mathcal{S}_k$ tiré suivant la distribution de probabilités $\mathbb{T}(s_k, s_{-k}|a) \in \Delta(\mathcal{S})$.

Déroulement du jeu. A l'étape $t \geq 1$ chacun des joueurs choisit indépendamment et simultanément une action a_k^t parmi son ensemble d'actions \mathcal{A}_k . Si $a^t = (a_1^t, \dots, a_K^t) \in \mathcal{A} = \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_k$ est l'action conjointe sélectionnée, l'utilité du joueur $k \in \mathcal{K}$ est $u_k(a^t)$. Ce joueur ne connaît pas nécessairement son utilité d'étape mais reçoit un signal $s_k^t \in \mathcal{S}_k$ tiré conjointement avec les autres signaux s_{-k}^t suivant la loi de probabilité $\mathbb{T}(a^t) \in \Delta(\mathcal{S})$.

Dans ce modèle, les histoires du jeu diffèrent d'un joueur à l'autre. Cette asymétrie d'information rend les stratégies de coopérations et de punitions bien plus difficiles à mettre en œuvre. Avant de définir les stratégies des joueurs, nous devons introduire le concept des histoires privées $h_k^t \in H_k^t$ pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ que l'on distinguera de l'histoire du jeu $h^t \in H^t$.

- L'ensemble des histoires du jeu, noté $H = (\mathcal{A} \times \mathcal{S})^\infty$ est l'ensemble des suites d'actions et de signaux du jeu répété : $h = ((a_k^1)_{k \in \mathcal{K}}, (u_k^1)_{k \in \mathcal{K}}, \dots, (a_k^t)_{k \in \mathcal{K}}, (u_k^t)_{k \in \mathcal{K}}, \dots)$.
- L'ensemble des histoires du joueur $k \in \mathcal{K}$, noté $H_k = (\mathcal{A}_k \times \mathcal{S}_k)^\infty$ est l'ensemble des suites d'actions et de signaux du joueur $k \in \mathcal{K}$ lors du jeu répété : $h_k = (a_k^1, s_k^1, \dots, a_k^t, s_k^t, \dots)$.
- L'ensemble des histoires du jeu à l'étape t , noté $H^t = (\mathcal{A} \times \mathcal{S})^{\times t-1}$ est l'ensemble des suites d'actions et de signaux jusqu'à l'étape $t-1$ du jeu répété : $h^t = ((a_k^1)_{k \in \mathcal{K}}, (s_k^1)_{k \in \mathcal{K}}, \dots, (a_k^{t-1})_{k \in \mathcal{K}}, (s_k^{t-1})_{k \in \mathcal{K}})$.
- L'ensemble des histoires du joueur $k \in \mathcal{K}$ à l'étape t , noté $H_k^t = (\mathcal{A}_k \times \mathcal{S}_k)^{\times t-1}$ est l'ensemble des suites d'actions et de signaux du joueur $k \in \mathcal{K}$ jusqu'à l'étape $t-1$ du jeu répété : $h_k^t = (a_k^1, s_k^1, \dots, a_k^{t-1}, s_k^{t-1})$.
- Une stratégie pure du joueur $k \in \mathcal{K}$ est une suite de fonctions $(\tau_k^t)_{t \geq 1}$ avec $\forall t \geq 1$, $\tau_k^t : H_k^t \mapsto \mathcal{A}_k$ qui prend une histoire $h_k^t \in H_k^t$ du joueur $k \in \mathcal{K}$ et associe une action pure $a_k \in \mathcal{A}_k$. Notons, \mathcal{T}_p l'ensemble de stratégies pures du jeu répété.
- Une stratégie mixte du joueur $k \in \mathcal{K}$ est une distribution de probabilité sur l'ensemble \mathcal{T}_p des stratégies pures.
- Une stratégie comportementale du joueur $k \in \mathcal{K}$ est une suite de fonctions $(\tau_k^t)_{t \geq 1}$ avec $\forall t \geq 1$, $\tau_k^t : H_k^t \mapsto \Delta(\mathcal{A}_k)$ qui prend une histoire $h_k^t \in H_k^t$ du joueur $k \in \mathcal{K}$ et associe une distribution sur les actions $p_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$. Notons $\mathcal{T} = \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{T}_k$ l'ensemble des stratégies comportementales.
- Une stratégie générale du joueur $k \in \mathcal{K}$ est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies comportementales.

De la même manière, un profil de stratégies comportementales $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathcal{T}$ induit naturellement une probabilité \mathcal{P}_τ sur H l'ensemble des histoires du jeu. Les utilités des jeux répétés de durée finie, aléatoire ou infinie sont définies comme précédemment par les équations (2.3), (2.8) et (2.12). De même, les conditions d'équilibre sont définies dans la section précédente aux définitions 2.6, 2.9 et 2.12.

2.5.2 Le problème du théorème Folk avec observation imparfaite

L'observation est imparfaite, les joueurs ne connaissent que partiellement les actions des autres joueurs. Ils observent des signaux qui traduisent plus ou moins précisément les actions choisies à chaque étape. En observation parfaite, les signaux sont égaux aux actions jouées et les utilités d'équilibre sont caractérisées par le théorème Folk. En observation triviale (les signaux ne révèlent aucune information sur les actions jouées) les utilités d'équilibre sont celle de l'équilibre de Nash du jeu en un coup. Cependant, aucun résultat n'existe pour une structure de signaux générale.

Problème 2.15 (Problème principal) La caractérisation générale des utilités d'équilibre du jeu répété avec observation imparfaite est un problème ouvert pour les jeux finis, escomptés et infinis.

Certaines hypothèses sur la structure d'observation permettent de retrouver l'ensemble des utilités d'équilibre. Nous passons en revue quatre de ces résultats.

2.5.2.1 Structure d'observation semi-standard

Les ensembles d'actions \mathcal{A}_k de chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ sont partitionnés en sous-ensembles $\beta_k \in B_k$ tel que $\cup_{\beta_k \in B_k} \beta_k = \mathcal{A}_k$. Nous présentons le résultat publié dans [47] qui caractérise l'ensemble des utilités d'équilibre de Nash pour le jeu répété infini.

Définition 2.16 Les signaux sont semi-standards si les joueurs observent l'élément de la partition $(\beta_1, \dots, \beta_K)$ qui contient l'action conjointe (a_1, \dots, a_K) précédemment choisie $a_k \in \beta_k$ pour tout $k \in \mathcal{K}$.

$$\Upsilon : \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_k \mapsto \Delta \left(\prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{S}_k \right) \quad (2.17)$$

$$(a_1, \dots, a_K) \mapsto ((\beta_1, \dots, \beta_K), \dots, (\beta_1, \dots, \beta_K)), \quad \text{tel que } a_k \in \beta_k, \forall k \in \mathcal{K} \quad (2.18)$$

Pour ces signaux semi-standard, deux actions $a_k \in \mathcal{A}_k$ et $a'_k \in \mathcal{A}_k$ sont équivalentes, notées $a_k \sim a'_k$ si $a_k \in \beta_k$ et $a'_k \in \beta_k$. De même $p_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ et $p'_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ sont équivalentes, notées $p_k \sim p'_k$ si $\forall \beta_k \in B_k, p_k(\beta_k) = p'_k(\beta_k)$.

Définition 2.17 L'ensemble des actions indépendantes robustes aux déviations non-distinguables du joueur $k \in \mathcal{K}$ est défini comme suit.

$$\mathcal{R} = \left\{ p \in \prod_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k) \mid \mathbb{E}_p u_k(a) = \max_{p'_k \sim p_k} \mathbb{E}_{p'_k, p_{-k}} u_k(a_k, a_{-k}), \forall k \in \mathcal{K} \right\}. \quad (2.19)$$

Théorème 2.18 (Le théorème Folk avec observation semi-standard [47]) *Pour tout jeu répété infini à K joueurs avec signaux semi-standards, l'ensemble des utilités d'équilibre de Nash est égal à l'ensemble des utilités réalisables, robustes aux déviations non-distinguables et individuellement rationnelles.*

$$NE = IR \cap \text{conv } u(\mathcal{R}). \quad (2.20)$$

Ces types de signaux autorisent une caractérisation des équilibres de Nash pour \mathcal{K} joueurs. L'élément important est que tous les joueurs possèdent la même information sur les actions des autres joueurs. Les histoires du jeu sont connaissance commune et interdisent aux joueurs toute corrélation à partir des signaux. Si un joueur dévie en jouant une action qui n'appartient pas à la même classe d'équivalence, tous les joueurs le détectent immédiatement, identifient l'auteur et le punissent. Ce type de signaux permettent de contourner les problèmes difficiles de corrélation, d'identification et d'organisation de la punition.

2.5.2.2 Structure d'observation sur un graphe 2-connexe

Les joueurs sont disposés sur un graphe d'observation \mathcal{G} . Les signaux sont supportés par le graphe \mathcal{G} si chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ observe parfaitement les actions prises par ses voisins $j \in \mathcal{G}(k)$. Le résultat publié dans [58] caractérise l'ensemble des utilités d'équilibre de Nash pour le jeu répété infini. Définissons les niveaux min-max pour le jeu avec observation imparfaite.

Définition 2.19 Le joueur k peut défendre l'utilité $x_k \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \tau_{-k} \in \mathcal{T}_{-k}, \exists \tau_k \in \mathcal{T}_k, \exists T_0 \geq 0 \forall T \geq T_0, x_k - \varepsilon \leq \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}). \quad (2.21)$$

Les joueurs $j \neq k$ peuvent garantir l'utilité $x_k \in \mathbb{R}$ au joueur $k \in \mathcal{K}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau_{-k} \in \mathcal{T}_{-k}, \exists T_0 \geq 0 \forall \tau_k \in \mathcal{T}_k, \forall T \geq T_0, x_k + \varepsilon \geq \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}). \quad (2.22)$$

Le niveau min-max v_k^∞ du joueur $k \in \mathcal{K}$, s'il existe, est tel que le joueur $k \in \mathcal{K}$ peut défendre v_k^∞ et les joueurs $j \neq k$ peuvent garantir v_k^∞ .

Notons $IR(\mathcal{G}, u)$ l'ensemble des utilités individuellement rationnelles avec signaux sur un graphe \mathcal{G} et fonctions d'utilités u :

$$IR(\mathcal{G}, u) = \{(x_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathbb{R}^N, x^i \geq v_k^\infty \ \forall k \in \mathcal{K}\}. \quad (2.23)$$

Pour toutes les structures d'informations, nous avons $v_k^\infty \leq v_k$ et $IR \subset IR(\mathcal{G}, u)$.

Définition 2.20 Notons \mathcal{G}_k le graphe induit par \mathcal{G} lorsque le joueur $k \in \mathcal{K}$ est enlevé. Un graphe \mathcal{G} est 2-connexe si \mathcal{G} est fortement connexe et si pour tout $k \in \mathcal{K}$, le graphe \mathcal{G}_k est fortement connexe.

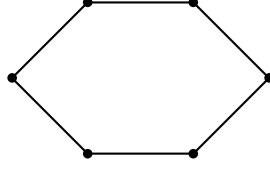


FIGURE 2.3 – Exemple de graphe d'observation 2-connexe \mathcal{G} .

Le résultat qui suit repose sur la richesse de la structure d'observation. L'information stratégique peut se répandre dans le graphe des joueurs. La déviation d'un joueur k est immédiatement détectée par ses voisins $\mathcal{G}(k)$. L'identité du déviateur et la date du début de la punition deviennent connaissance commune après un nombre fini d'étapes. La structure des signaux permet de garantir une condition d'équilibre car la menace d'une punition est suffisamment crédible.

Théorème 2.21 (Le théorème Folk avec observation sur un graphe 2-connexe [58])

Pour un jeu répété à K joueurs avec signaux supportés par le graphe \mathcal{G} , on a :

Le graphe \mathcal{G} est 2-connexe $\Leftrightarrow NE^\infty = u(\Delta(\mathcal{A})) \cap IR(\mathcal{G}, u)$, \forall fonction d'utilité $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

2.5.2.3 Structure d'observation presque parfaite

Les joueurs observent l'action jouée avec grande probabilité. Le résultat publié dans [40] caractérise l'ensemble des utilités d'équilibre de Nash pour le jeu répété escompté. Définissons la structure d'observation presque parfaite.

Définition 2.22 Une structure d'observation $\Upsilon : \mathcal{A} \rightarrow \Delta(\mathcal{S})$ est ε -parfaite avec $\varepsilon > 0$ si pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$, il existe une partition $\varsigma_k(a)$ avec $\cup_{a \in \mathcal{A}} \varsigma_k(a) = \mathcal{S}_k$ de son ensemble des signaux \mathcal{S}_k , indexée par les actions conjointes $a \in \mathcal{A}$ tel que :

$$\sum_{s_k \in \varsigma_k(a)} \Upsilon(s_k | a_k, a_{-k}) \geq 1 - \varepsilon. \quad (2.24)$$

Notons, NE_ε^λ l'ensemble des utilités d'équilibre du jeu répété escompté avec observation ε -parfaite.

Théorème 2.23 (Le théorème Folk avec observation presque parfaite [40]) Supposons que la structure d'observation Υ soit ε -parfaite. Alors l'ensemble des utilités d'équilibre converge lorsque λ et ε tendent vers 0.

$$NE_\varepsilon^\lambda \rightarrow IR \cap u(\Delta(\mathcal{A})), \text{ lorsque } \lambda, \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

2.5.2.4 Structure d'observation publique

Les joueurs observent le même signal public tiré en fonction de l'action conjointe précédemment choisie. L'observation est décrite par la probabilité de transition $\Upsilon : A \rightarrow \Delta(\mathcal{S})$ et pour chaque couple de joueurs $k, j \in \mathcal{K}$, nous avons $s_k = s_j$. Le résultat publié dans [29] caractérise l'ensemble des utilités d'équilibre de Nash publique pour le jeu répété escompté.

Définition 2.24 Définissons les notions de signaux publics vérifiant les propriétés de "rang individuel plein" et de "rang par paire plein".

- Définissons la matrice $\Pi_k(p_{-k})$ de taille $|\mathcal{A}_k| \times |\mathcal{S}|$ dont les lignes sont indexées par les actions $a_k \in \mathcal{A}_k$ et dont les colonnes sont indexées par les signaux $s \in \mathcal{S}$.

$$\Pi_k(p_{-k}) = \left(\Upsilon(s|a_k, p_{-k}) \right)_{\substack{a_k \in \mathcal{A}_k \\ s \in \mathcal{S}}} \quad (2.26)$$

La stratégie mixte $p \in \prod_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k)$ vérifie la propriété de "rang individuel plein" si pour tout joueur $k \in \mathcal{K}$, le rang de $\Pi_k(p_{-k})$ est égal à $|\mathcal{A}_k|$.

- Définissons la matrice $\Pi_{kj}(p)$ de taille $(|\mathcal{A}_k| + |\mathcal{A}_j|) \times |\mathcal{S}|$ dont les lignes sont indexées par les actions $a_k \in \mathcal{A}_k$ et $a_j \in \mathcal{A}_j$ et les colonnes sont indexées par les signaux $s \in \mathcal{S}$.

$$\Pi_{kj}(p) = \begin{pmatrix} \Pi_k(p_{-k}) \\ \Pi_j(p_{-j}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon(s|a_k, p_{-k}) \\ \Upsilon(s|a_j, p_{-j}) \end{pmatrix}_{\substack{(a_k, a_j) \in \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_j \\ s \in \mathcal{S}}} \quad (2.27)$$

La stratégie mixte $p \in \prod_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k)$ vérifie la propriété de "rang par paire plein" si pour tout couple de joueurs $k, j \in \mathcal{K}$, le rang de $\Pi_{kj}(p)$ est égal à $|\mathcal{A}_k| + |\mathcal{A}_j| - 1$.

Notons $NE^{\lambda*}$ l'ensemble des utilités d'équilibre *publique* du jeu répété escompté. Dans ce cas, les stratégies des joueurs ne tiennent compte que des informations publiques reçues à travers la structure d'observation Υ .

Théorème 2.25 (Le théorème Folk avec observation publique [29]) *L'observation publique permet, sous certaines conditions, de retrouver le théorème Folk.*

- Supposons que l'intérieur de $IR \cap u(\Delta(\mathcal{A}))$ est non-vide.
- Supposons que toute stratégie pure $a \in \mathcal{A}$ vérifie la propriété de "rang individuel plein".
- Supposons que pour chaque paire de joueurs $k, j \in \mathcal{K}$, il existe une stratégie mixte $p \in \prod_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k)$ qui vérifie la propriété de "rang par paire plein".

Alors l'ensemble des utilités d'équilibre converge lorsque λ tend vers 0.

$$NE^{\lambda*} \longrightarrow IR \cap u(\Delta(\mathcal{A})), \text{ lorsque } \lambda \longrightarrow 0. \quad (2.28)$$

2.6 Démonstration des théorèmes Folk avec observation parfaite

2.6.1 Théorème 2.8 Folk infini avec observation parfaite

Démonstration. Montrons d'abord l'inclusion $NE^\infty \subset IR \cap u(\Delta(\mathcal{A}))$, ensuite l'inclusion opposée. Soit $U \in IR \cap u(\Delta(\mathcal{A}))$ un vecteur d'utilité, construisons une stratégie conjointe qui procure l'utilité de long terme U et montrons qu'elle satisfait les conditions de l'équilibre uniforme.

Le plan principal est une suite infinie d'actions conjointes a^∞ dont l'utilité moyennée tend vers le vecteur d'utilité U .

$$a^\infty = (a^1, \dots, a^t, \dots) \in \mathcal{A}^\infty \text{ le plan principal tel que} \quad (2.29)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{T}, \forall T \geq \bar{T} \quad \left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_k(a^t) - U_k \right| \leq \varepsilon, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (2.30)$$

Le plan de punition du joueur $k \in \mathcal{K}$ est un vecteur d'action mixte des autres joueurs noté $x^*(k) = (x_j^*(k))_{j \neq k} \in \prod_{j \neq k} \Delta(\mathcal{A}_j)$ qui minimise l'utilité du joueur $k \in \mathcal{K}$.

$$x^*(k) = (x_j^*(k))_{j \neq k} = \operatorname{argmin}_{x_{-k} \in \prod_{j \neq k} \Delta(\mathcal{A}_j)} \left[\max_{x_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)} \mathbb{E}_{x_k, x_{-k}} u_k(a_k, a_{-k}) \right], \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (2.31)$$

La stratégie de punition du joueur $k \in \mathcal{K}$ par le joueur j est notée $x_j^*(k) \in \Delta(\mathcal{A}_j)$ et empêche le joueur $k \in \mathcal{K}$ d'obtenir une utilité supérieure à son niveau min-max.

La stratégie d'équilibre consiste à jouer le plan principal tant qu'aucun joueur ne dévie et à jouer le plan de punition du joueur $k \in \mathcal{K}$ si ce dernier a dévié lors d'une étape précédente. La stratégie d'équilibre $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathcal{T}$ est définie à chaque étape $t \geq 1$ comme suit.

$$\tau_k^t(h^t) = \begin{cases} a_k^t \in a_k^\infty & \text{tant que personne ne dévie,} \\ x_k^*(j) & \text{si le joueur } j \in \mathcal{K} \text{ a dévié précédemment.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Puisque l'observation est parfaite et que le plan principal est en stratégies pures, une déviation est détectée immédiatement par tous les joueurs. Dans ce cas, une punition efficace est rapidement mise en œuvre et l'interaction s'apparente au jeu à somme nulle où les joueurs minimisent l'utilité du déviateur. Si plusieurs joueurs dévient à la même date du plan principal, on punit celui de ces joueurs qui est le plus petit, selon un ordre total sur \mathcal{K} , préalablement fixé.

La condition d'équilibre. Pour montrer que cette stratégie est un équilibre uniforme, nous supposons que le joueur $k \in \mathcal{K}$ dévie en utilisant la stratégie τ'_k et nous montrons que le gain de déviation est inférieur à ε . Supposons que la première action de déviation est jouée à la date s et que T soit la durée du jeu. Calculons, pour le joueur $k \in \mathcal{K}$, les utilités associées à la stratégie d'équilibre τ_k ou de déviation τ'_k où U_k^s est l'utilité de déviation du joueur $k \in \mathcal{K}$ à la date s .

$$\gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_k(a^t), \quad (2.33)$$

$$\gamma_k^T(\tau'_k, \tau_{-k}) = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^{s-1} u_k(a^t) + U_k^s + \sum_{t=s+1}^T v_k \right) \quad (2.34)$$

$$= \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^{s-1} u_k(a^t) + U_k^s + (T-s)v_k \right). \quad (2.35)$$

Montrons que la stratégie τ est un équilibre uniforme du jeu répété infini. Fixons $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe une durée de jeu \bar{T} tel que pour tout $T \geq \bar{T}$,

$$\gamma_k^T(\tau'_k, \tau_{-k}) \leq \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}) + \varepsilon; \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall \tau'_k \in \mathcal{T}_k. \quad (2.36)$$

Par définition du plan principal, il existe un T_0 tel que :

$$\left| \frac{1}{T_0} \sum_{t=1}^{T_0} u_k(a^t) - U_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.37)$$

Notons \bar{u}_k l'utilité maximale que peut obtenir le joueur $k \in \mathcal{K}$. Choisissons T tel que :

$$T \geq \frac{2(\bar{u}_k - v_k)}{\varepsilon}, \quad (2.38)$$

$$T \geq \frac{\bar{u}_k + v_k(T_0 - 1)}{\varepsilon}. \quad (2.39)$$

Supposons que la déviation apparaisse tôt, i.e. $T-s+1 \geq T_0$. D'après la condition

(2.37), nous avons

$$\left| \frac{1}{T-s+1} \sum_{t=s}^T u_k(a^t) - U_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow U_k \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{T-s+1} \sum_{t=s}^T u_k(a^t) \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow (T-s+1)v_k \leq (T-s+1)\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{t=s}^T u_k(a^t) \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow (T-s+1)v_k + \bar{u}_k - v_k \leq (T-s+1)\frac{\varepsilon}{2} + T\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{t=s}^T u_k(a^t) \quad (2.43)$$

$$\Rightarrow \bar{u}_k + (T-s)v_k \leq T\varepsilon + \sum_{t=s}^T u_k(a^t) \quad (2.44)$$

$$\Rightarrow \gamma_k^T(\tau'_k, \tau_{-k}) \leq \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}) + \varepsilon. \quad (2.45)$$

La première implication est directe, la seconde est due au fait que $v_k \leq U_k$, la troisième vient de condition (2.38) sur la durée s du jeu, la quatrième est directe et la dernière vient des utilités définies par les équations (2.33) et (2.35).

Supposons maintenant que la déviation apparaisse tard, i.e. $T-s+1 < T_0$.

$$T-s+1 < T_0 \quad (2.46)$$

$$\Rightarrow \bar{u}_k + (T-s+1)v_k \leq \bar{u}_k + v_k T_0 \quad (2.47)$$

$$\Rightarrow \bar{u}_k + (T-s)v_k \leq \bar{u}_k + v_k(T_0 - 1) \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow \bar{u}_k + (T-s)v_k \leq \varepsilon T \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow \bar{u}_k + (T-s)v_k \leq \varepsilon T + \sum_{t=s}^T u_k(a^t) \quad (2.50)$$

$$\Rightarrow \gamma_k^T(\tau'_k, \tau_{-k}) \leq \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}) + \varepsilon. \quad (2.51)$$

L'implication (2.49) est due à la condition (2.39) sur la durée du jeu. En conclusion, pour un ε fixé, la durée du jeu doit être supérieure à \bar{T} défini comme suit.

$$\bar{T} = \max_{k \in K} \max \left(\frac{\bar{u}_k + v_k(T_0 - 1)}{\varepsilon}, \frac{2(\bar{u}_k - v_k)}{\varepsilon} \right). \quad (2.52)$$

Le vecteur d'utilité U est soutenu par une stratégie d'équilibre uniforme du jeu répété infini Γ^∞ .

D'autre part supposons $U \notin IR \cap u(\Delta(\mathcal{A}))$. Puisque $U \notin u(\Delta(\mathcal{A}))$ n'est pas réalisable, il n'est pas soutenu par une stratégie d'équilibre. Supposons maintenant que $U \notin IR$, alors il existe un joueur $k \in \mathcal{K}$ tel que $U_k < v_k$. Par définition du minmax, le joueur $k \in \mathcal{K}$ possède une stratégie lui garantissant la valeur v_k à chaque étape. Ce joueur possède donc une déviation profitable et U n'est pas une utilité d'équilibre. \square

L'hypothèse d'observation parfaite est cruciale pour montrer le résultat précédent. C'est l'éventualité de la punition qui permet d'élargir, dans la répétition, les utilités d'équilibre. Encore faut-il que cette menace soit crédible, que les joueurs puissent facilement détecter une déviation, que l'identité du déviateur soit rapidement connaissance commune, pour finalement punir le déviateur.

Remarque 2.26 La terminologie actuelle du théorème Folk est proche de celle d'Aumann [5]. La formulation de A. Rubinstein [61] utilise la notion d'équilibre "stationnaire" et de "strongly forced outcome" : utilités sans déviation profitable possible ou strictement individuellement rationnelles.

2.6.2 Théorème 2.10 Folk escompté avec observation parfaite

Démonstration. Soit un vecteur $U \in IR \cap u(\Delta(\mathcal{A}))$. Montrons que pour tout ε , il existe $\bar{\lambda}$ tel que pour tout $\lambda \leq \bar{\lambda}$ il existe un vecteur d'utilité d'équilibre U^λ tel que $\|U - U^\lambda\| \leq \varepsilon$. Définissons le plan principal et la plan de punition de manière similaire à celui de la démonstration du théorème Folk infini (voir équations (2.29), (2.30) et (2.31)).

La stratégie d'équilibre consiste à jouer le plan principal tant qu'aucun joueur ne dévie et à jouer le plan de punition du joueur $k \in \mathcal{K}$ si ce dernier a dévié lors d'une étape précédente. La stratégie d'équilibre $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathcal{T}$ est définie à chaque étape $t \geq 1$ comme suit.

$$\tau_k^t = \begin{cases} a_k^t \in a_k^\infty & \text{tant que personne ne dévie,} \\ x_k^*(j) & \text{si le joueur } j \in \mathcal{K} \text{ a dévié précédemment.} \end{cases} \quad (2.53)$$

Ici encore, l'observation parfaite est une hypothèse cruciale pour pouvoir mettre en place le plan de punition et garantir une condition d'équilibre.

La condition d'équilibre. Pour montrer que cette stratégie est un équilibre, nous supposons que le joueur $k \in \mathcal{K}$ dévie en utilisant la stratégie τ'_k . Supposons que la première action de déviation est jouée à la date s . Calculons, pour le joueur $k \in \mathcal{K}$ les utilités associées à la stratégie d'équilibre τ_k ou de déviation τ'_k où U_k^s est l'utilité de

déviaton du joueur $k \in \mathcal{K}$ à la date s .

$$\gamma_k^\lambda(\tau_k, \tau_{-k}) = \sum_{t \geq 1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} u(a^t), \quad (2.54)$$

$$\gamma_k^\lambda(\tau'_k, \tau_{-k}) = \sum_{t=1}^{s-1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} u(a^t) + \lambda(1 - \lambda)^{s-1} U^s + \sum_{t \geq s+1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} v_k \quad (2.55)$$

$$= \sum_{t=1}^{s-1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} u(a^t) + \lambda(1 - \lambda)^{s-1} U^s + (1 - \lambda)^s v_k. \quad (2.56)$$

Notons $U_k^\lambda = \gamma_k^\lambda(\tau_k, \tau_{-k})$ l'utilité que procure le plan principal (2.29), (2.30) avec le facteur d'escompte λ . Cette utilité converge vers U lorsque λ tend vers 0.

$$a^\infty = (a_1, \dots, a_t, \dots) \in \mathcal{A}^\infty \text{ le plan principal tel que} \quad (2.57)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\lambda}, \forall \lambda \leq \bar{\lambda} \quad \left| \sum_{t \geq 1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} u_k(a_t) - U_k \right| \leq \varepsilon, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (2.58)$$

Notons \bar{u}_k l'utilité maximale que peut obtenir le joueur $k \in \mathcal{K}$. Choisissons $\bar{\lambda}$ tel que :

$$\bar{\lambda} = \min_{k \in \mathcal{K}} \frac{U_k^\lambda - v_k}{\bar{u}_k - v_k}. \quad (2.59)$$

Montrons que pour tout $\lambda \leq \bar{\lambda}$, la stratégie τ est un équilibre du jeu répété escompté Γ^λ .

$$\lambda \leq \frac{U_k^\lambda - v_k}{\bar{u}_k - v_k} \quad (2.60)$$

$$\implies \lambda(\bar{u}_k - U_k^\lambda) \leq (1 - \lambda)(U_k^\lambda - v_k) \quad (2.61)$$

$$\implies \lambda \bar{u}_k + (1 - \lambda)v_k \leq U_k^\lambda \quad (2.62)$$

$$\implies (1 - \lambda)^{T-1} \lambda \bar{u}_k + (1 - \lambda)^T v_k \leq (1 - \lambda)^{T-1} U_k^\lambda \quad (2.63)$$

$$\implies (1 - \lambda)^{T-1} \lambda \bar{u}_k + (1 - \lambda)^T v_k \leq \sum_{t \geq T+1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} u_k(a^t) \quad (2.64)$$

$$\implies \sum_{t=1}^{T-1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} u(a^t) + \lambda(1 - \lambda)^{T-1} U^T \quad (2.65)$$

$$+ \sum_{t \geq T+1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} v_k \leq \sum_{t \geq 1} \lambda(1 - \lambda)^{t-1} u(a^t) \quad (2.66)$$

$$\implies \gamma_k^\lambda(\tau'_k, \tau_{-k}) \leq \gamma_k^\lambda(\tau_k, \tau_{-k}). \quad (2.67)$$

Pour tout ε , il existe $\bar{\lambda}$ tel que pour tout $\lambda \leq \bar{\lambda}$ il existe un vecteur d'utilité U^λ qui est un équilibre et qui satisfait $\|U - U^\lambda\| \leq \varepsilon$. Nous avons montré que la limite des

ensembles d'utilité d'équilibre est contenue dans l'ensemble des utilités réalisables et individuellement rationnelles.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} NE^\lambda \subset IR \cap u(\Delta(\mathcal{A})). \quad (2.68)$$

Comme pour la preuve du théorème 2.8 précédent, l'inclusion inverse est directe puisque tout vecteur d'utilité hors de $IR \cap u(\Delta(\mathcal{A}))$ ne sera jamais soutenu par une stratégie d'équilibre. \square

2.6.3 Théorème 2.13 Folk fini avec observation parfaite

Démonstration. Soit un vecteur $U \in IR \cap u(\Delta(\mathcal{A}))$. Montrons que pour tout ε , il existe \bar{T} tel que pour tout $T \geq \bar{T}$ il existe une stratégie d'équilibre $\tau \in \mathcal{T}$ dont l'utilité U^T satisfait $\|U - U^T\| \leq \varepsilon$.

Définissons le plan principal et le plan de punition de manière similaire à celui de la démonstration du théorème Folk infini (voir équations (2.29), (2.30) et (2.31)). Il existe un nombre d'étapes T_1 pour lequel l'utilité moyenne est proche de l'utilité désirée U_k et supérieure aux niveaux min-max.

$$\left| \frac{1}{T_1} \sum_{t=1}^{T_1} u_k(a^t) - U_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.69)$$

$$v_k \leq \frac{1}{T_1} \sum_{t=1}^{T_1} u_k(a^t). \quad (2.70)$$

La stratégie d'équilibre consiste à d'abord jouer $n \in \mathbb{N}$ fois le plan principal en T_1 étapes (a^1, \dots, a^{T_1}) puis l'équilibre de Nash du jeu en un coup durant les T_0 dernières étapes tant qu'aucun joueur ne dévie. Le jeu répété fini se déroule alors sur $T = nT_1 + T_0$ étapes. Si le joueur $k \in \mathcal{K}$ a dévié précédemment, alors les joueurs mettent en place le plan de punition du joueur $k \in \mathcal{K}$. Notons p_k^* l'action d'équilibre de Nash du jeu en un coup et u_k^* l'utilité correspondante. La stratégie d'équilibre $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}} \in \mathcal{T}$ est définie à chaque étape $t \in \{1, \dots, T\}$ comme suit.

$$\tau_k^t = \begin{cases} a_k^t \in (a^1, \dots, a^{T_1})^{\times n} & \text{si } t < T - T_0 \text{ tant que personne ne dévie,} \\ p_k^* & \text{si } t \geq T - T_0 \text{ tant que personne ne dévie,} \\ x_k^*(j) & \text{si le joueur } j \in \mathcal{K} \text{ a dévié précédemment.} \end{cases} \quad (2.71)$$

Ici encore, l'observation parfaite est une hypothèse cruciale pour pouvoir mettre en place le plan de punition et garantir une condition d'équilibre.

La condition d'équilibre. Pour montrer que cette stratégie est un équilibre, nous supposons que le joueur $k \in \mathcal{K}$ dévie en utilisant la stratégie τ'_k . Supposons que la première action de déviation est jouée à la date s . Si le joueur $k \in \mathcal{K}$ dévie pendant l'une des dernières étapes $s \geq T - T_0$, alors la déviation ne sera pas profitable car les joueurs jouent l'équilibre de Nash du jeu en un coup. Calculons, pour le joueur $k \in \mathcal{K}$ les utilités associées à la stratégie d'équilibre τ_k ou de déviation τ'_k où U_k^s est l'utilité de déviation du joueur $k \in \mathcal{K}$ à la date $s < T - T_0$.

$$\gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}) = \frac{1}{T} \left(n \cdot \sum_{t=1}^{T_1} u(a^t) + T_0 u_k^* \right), \quad (2.72)$$

$$\gamma_k^T(\tau'_k, \tau_{-k}) = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^{s-1} u_k(a^t) + U_k^s + \sum_{t=s+1}^T v_k \right) \quad (2.73)$$

$$= \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^{s-1} u_k(a^t) + U_k^s + (T - s) v_k \right). \quad (2.74)$$

Notons $U_k^T = \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k})$ l'utilité que procure la stratégie d'équilibre du jeu en T étapes et \bar{u}_k l'utilité maximale que peut obtenir le joueur $k \in \mathcal{K}$. Choisissons \bar{T} tel que :

$$\bar{T} \geq nT_1 + T_0, \quad (2.75)$$

$$T_0 \geq \max_{k \in \mathcal{K}} \frac{\bar{u}_k + 2 \sum_{t=1}^{T_1} [v_k - u_k(a^t)]_+}{u_k^* - v_k}, \quad (2.76)$$

$$n \geq \max_{k \in \mathcal{K}} \frac{2T_0 |u_k^* - v_k|}{\varepsilon T_1}. \quad (2.77)$$

Montrons que la stratégie τ est un équilibre du jeu fini Γ^T .

$$\frac{\bar{u}_k + 2 \sum_{t=1}^{T_1} [v_k - u_k(a^t)]_+}{u_k^* - v_k} \leq T_0 \quad (2.78)$$

$$\implies \frac{\bar{u}_k + \sum_{t=s}^{T-T_0} (v_k - u_k(a^t))}{u_k^* - v_k} \leq T_0 \quad (2.79)$$

$$\implies \bar{u}_k + \sum_{t=s+1}^T v_k \leq \sum_{t=s}^{T-T_0} u_k(a^t) + T_0 u_k^* \quad (2.80)$$

$$\implies \bar{u}_k + \sum_{t=s+1}^T v_k \leq \sum_{t=s}^{T-T_0} u_k(a^t) + T_0 u_k^* \quad (2.81)$$

$$\implies \gamma_k^T(\tau'_k, \tau_{-k}) \leq \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}). \quad (2.82)$$

$$(2.83)$$

La première implication vient de la condition (2.70). En effet, la moyenne des utilités du plan principal Pareto-domine les niveaux min-max. Donc $\sum_{t=s}^{T-T_0} (v_k - u_k(a^t)) \leq \sum_{t=1}^{T_1} [v_k - u_k(a^t)]_+$. La stratégie τ est un équilibre du jeu fini Γ^T .

Montrons que l'utilité de la stratégie τ est proche de U_k .

$$\left| \frac{1}{T} \left(n \sum_{t=1}^{T_1} u_k(a^t) + T_0 u_k^* \right) - U_k \right| \leq \frac{nT_1}{T} \left| \frac{1}{T_1} \sum_{t=1}^{T_1} u_k(a^t) - U_k \right| + \frac{T_0}{T} |u_k^* - U_k| \quad (2.84)$$

$$\leq \frac{nT_1}{T} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{T_0}{nT_1} |u_k^* - U_k| \quad (2.85)$$

$$\leq \varepsilon. \quad (2.86)$$

La seconde inégalité vient de la condition 2.69 et la troisième vient de la condition 2.77.

Nous avons montré que pour tout ε il existe $\bar{T} = (nT_1 + T_0)$ tel que pour tout $T \geq \bar{T}$, il existe un vecteur d'utilité U_k^T d'équilibre qui satisfait $|U_k^T - U_k| \leq \varepsilon$. En conclusion, la limite des ensembles d'utilité d'équilibre est contenue dans l'ensemble des utilités réalisables et individuellement rationnelles.

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} NE^T \subset IR \cap u(\Delta(\mathcal{A})). \quad (2.87)$$

Comme pour la preuve du théorème 2.8 précédent, l'inclusion inverse est directe puisque tout vecteur d'utilité hors de $IR \cap u(\Delta(\mathcal{A}))$ ne sera jamais soutenu par une stratégie d'équilibre. \square

2.7 Conclusion et perspectives

Ce chapitre débute par la section 2.2 avec l'étude du jeu du "dilemme du prisonnier". Les utilités à l'équilibre sont caractérisées pour le jeu en un coup et pour le jeu répété avec observation parfaite des actions passées. La durée de l'interaction permet aux joueurs de garantir une condition d'équilibre pour des stratégies qui atteignent des utilités Pareto-optimales. La répétition autorise la coopération, à condition que l'observation des actions passées soit parfaite. Le modèle du jeu en un coup est présenté à la section 2.3. Nous rappelons ce qu'est un jeu, un équilibre de Nash, des stratégies pures et mixtes, le concept d'optimalité au sens de Pareto et le théorème d'existence de l'équilibre de Nash. La section 2.4 présente le modèle du jeu répété lorsque les joueurs observent parfaitement les actions passées. Dans ce contexte, les stratégies sont des suites de fonctions qui partent de l'histoire du jeu et qui renvoient à une action. Les utilités sont moyennées sur le long terme grâce aux moyennes d'Abel ou de Cesàro. Lorsque l'observation des actions passées est parfaite, les théorèmes Folk 2.8, 2.10 et 2.13 caractérisent l'ensemble des utilités d'équilibre des jeux répétés infinis, escomptés ou finis. La

LA COOPÉRATION ENTRE DES JOUEURS EST UN ÉQUILIBRE À CONDITION QUE
L'OBSERVATION DES ACTIONS PASSÉES SOIT SUFFISAMMENT PRÉCISE.

section 2.5 est consacrée au modèle du jeu répété avec observation imparfaite. Lorsque les joueurs observent les actions à travers une structure d'observation imparfaite \mathcal{I} , l'ensemble des utilités d'équilibre n'est pas caractérisé. Des résultats existent pour certaines structures d'observation étudiées aux sections 2.5.2.1, 2.5.2.2, 2.5.2.3 et 2.5.2.4. Ce problème général n'étant pas résolu, nous proposons deux axes de recherche qui seront développés dans les chapitres 4 et 5 :

- Modifier la structure d'observation courante pour se ramener à une structure d'observation pour laquelle l'ensemble des utilités d'équilibre est caractérisé.
- Approfondir l'étude du théorème Folk avec observation imparfaite grâce aux outils issus de la théorie de l'information.

Chapitre 3

Jeu du contrôle de puissance

3.1 Description et résultats principaux

Le chapitre 2 présente une vue d'ensemble des modèles de jeux répétés avec un horizon fini, aléatoire ou infini et une observation parfaite ou imparfaite. Ces différents modèles permettent de comprendre les mécanismes fondamentaux qui entrent en jeu au cours d'une interaction. Ce chapitre est consacré à l'étude d'une situation stratégique qui intervient en télécommunication, lorsque plusieurs émetteurs transmettent des informations simultanément sur la même bande de fréquences. En effet, la puissance de transmission d'un émetteur altère les signaux reçus par le récepteur et donc la communication de tous les autres émetteurs. Le problème du contrôle de puissance décentralisé dans un réseau de communication est un problème auquel la théorie des jeux peut apporter des réponses pertinentes.

Les résultats de théorie des jeux dépendent fortement des hypothèses sur l'information que possèdent les joueurs, sur la durée du jeu, sur les espaces d'actions, sur les fonctions d'utilité, sur les niveaux d'intelligence des autres joueurs, et cætera. L'exemple de la section 2.2 est significatif. Suivant qu'un jeu est joué une seule fois ou joué sur un grand nombre d'étapes, l'ensemble des utilités d'équilibre se transforme totalement. La première contribution de cette thèse est constituée de quatre théorèmes. Les théorèmes 3.11 et 3.12 proposent des stratégies d'équilibre réalisables pour les jeux répétés finis ou escomptés. Les théorèmes 3.14 et 3.18 caractérisent l'ensemble général des utilités d'équilibre pour le jeu répété escompté avec observation du signal RSIB défini par l'équation (3.2). Dans les sections qui suivent, nous examinons les différentes hypothèses d'informations que possèdent les joueurs à propos du jeu du contrôle de puissance dans un réseau de communication. Le modèle est présenté durant la section 3.2. La section 3.3 rappelle l'existence, l'unicité et caractérise l'équilibre de Nash du jeu de contrôle de puissance en un coup. Dans cette situation, nous admettons que les joueurs connaissent les données du jeu, c'est-à-dire le nombre de joueurs, les espaces d'actions

et les fonctions d'utilité. Il sont supposés rationnels, ce qui signifie qu'ils maximisent leur fonction d'utilité sachant que les autres joueurs aussi maximisent leur fonction d'utilité, sachant que tous les joueurs maximisent leur fonction d'utilité, et cœtera. Cette hypothèse de rationalité constitue le socle sur lequel repose le concept d'équilibre, à la base de l'approche par la théorie des jeux. Elle reste valable tout au long de ce document. Les utilités correspondant aux puissances d'équilibre de Nash ne sont pas optimales pour le système. Les joueurs ont la possibilité de jouer des puissances de transmission qui augmentent les utilités de tous les joueurs. Cependant, la stabilité d'une telle solution n'est pas garantie puisqu'aucune condition d'équilibre n'est satisfaite. La section 3.4 présente un modèle de jeu de Stackelberg où les joueurs sont divisés en deux groupes : les meneurs et les suiveurs. Les joueurs appelés les suiveurs possèdent une information supplémentaire : ils observent les actions que choisissent les meneurs avant de jouer. Ces hypothèses modifient le résultat du jeu et l'équilibre de Stackelberg est caractérisé. La section 3.5 présente le modèle du jeu répété appliqué au contrôle de puissance. Dans ce modèle, les joueurs interagissent sur le long terme et prennent en compte les actions passées des autres joueurs. Ces dernières sont observées de manière imparfaite, à travers le signal RSIB. Les théorèmes 3.11 et 3.12 fournissent des stratégies explicites pour le jeu répété fini et escompté. Seule la connaissance des gains des canaux individuels est nécessaire pour implémenter ces stratégies. Les utilités correspondantes sont Pareto-optimale (voir la définition 2.5) lorsque les gains des canaux sont constants au cours du jeu. Ces utilités Pareto-dominent les utilités de l'équilibre de Nash du jeu en un coup indépendamment du fait que les canaux soient constants ou variables. La section 3.6 est consacrée à l'étude générale des utilités d'équilibre du jeu répété escompté. Les théorèmes 3.14 et 3.18 caractérisent les ensembles des utilités d'équilibre lorsque les gains des canaux sont constants ou varient suivant un processus stochastique. Ce résultat signifie que les utilités n'appartenant pas à ces régions ne sont atteints par aucune stratégie d'équilibre. La section 3.7 permet d'illustrer les utilités correspondant aux différentes notions : équilibre de Nash du jeu en un coup, de Stackelberg, du jeu répété. Les figures 3.2 et 3.7 montrent que les utilités d'équilibre du jeu répété Pareto-dominent les autres utilités d'équilibre lorsque les canaux sont constants ou stochastiques. La section 3.8 est consacrée aux démonstrations des théorèmes précédents et la section 3.9 nous permet de conclure et d'envisager de nouvelles perspectives de travail.

3.2 Modèle de canal

Nous considérons un canal à accès multiples avec K émetteurs décrit par la figure 3.1, décentralisé au sens du contrôle de puissance. Nous supposons que le récepteur (par exemple, une station de base SB) n'est pas en mesure d'imposer aux émetteurs (par exemple, les stations mobiles $k \in \mathcal{K}$) une puissance d'émission p_k . Au contraire, ces derniers choisissent eux-mêmes leur puissance d'émission de manière à maximiser l'efficacité énergétique de leur propre communication. En particulier, ils sont capables

d'ignorer certaines recommandations centralisées. Nous supposons que les utilisateurs transmettent simultanément leurs données sur des canaux quasi-statiques et de même fréquence. Notez qu'un bloc est défini comme une suite de M symboles consécutifs com-

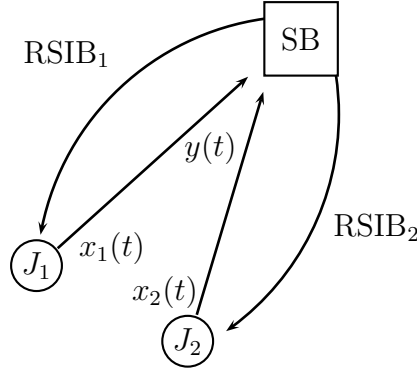


FIGURE 3.1 – Canal à accès multiples décentralisé au sens du contrôle de puissance. À l'étape $t \geq 1$, le joueur $k \in \mathcal{K}$ choisit la puissance $p_k(t)$ de transmissions des symboles $x_k(t)$. Le signal reçu par la station de base (SB) s'écrit $y(t)$. Cette dernière envoie le signal RSIB_k à chaque joueur.

prenant une "séquence d'apprentissage" : plusieurs symboles sont utilisés, au début du bloc, pour estimer les paramètres du canal. La durée d'un bloc est inférieure au temps de cohérence du canal (durée pendant laquelle le gain du canal est constant). Le récepteur connaît, à chaque bloc, les gains de tous les canaux montants (hypothèse de communication cohérente) alors que les émetteurs n'ont connaissance que du gain de leur propre canal. Cette dernière hypothèse est réaliste pour deux scénarios : (a) lorsque la réciprocité des canaux montants-descendants est avérée et que le récepteur envoie une séquence d'apprentissage aux transmetteurs ; (b) lorsque le canal montant varie suffisamment lentement pour que le récepteur puisse implémenter un mécanisme qui informe les récepteurs de l'état du canal. Le modèle de signal que nous étudions correspond au canal à accès multiples étudié en théorie de l'information (voir [84, 17, 8]). Ce canal possède plusieurs propriétés intéressantes. Il capture les principaux aspects du problème, notamment les liens entre la qualité de la communication et le rapport "signal sur interférence plus bruit" (RSIB). Il peut être facilement appliqué à des systèmes utilisés actuellement tels que les systèmes CDMA [62, 32, 62] ou les systèmes CDMA avec multi-porteuses [27]. Le signal, équivalent en termes de bande de fréquences, reçu par la station de base s'écrit comme suit :

$$y(t) = \sum_{k=1}^K g_k(t)x_k(t) + z(t), \quad (3.1)$$

où l'on note $k \in \mathcal{K}$ l'indice de l'émetteur avec $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$. La notation $x_k(t)$ désigne le symbole transmis par l'émetteur $k \in \mathcal{K}$ à l'étape $t \geq 1$ et $\mathbb{E}|x_k|^2 = p_k$ est la puissance du signal. Le bruit z est distribué selon une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 . Chaque gain du canal g_k varie dans le temps, mais est supposé être constant sur chaque bloc. Pour chaque émetteur $k \in \mathcal{K}$, le module du gain du canal $\eta_k = |g_k|^2 \in \Theta$ appartient à un ensemble compact $\eta_k \in \Theta = [\eta_k^{\min}, \eta_k^{\max}]$. Cette hypothèse est à la fois pratique et nécessaire pour garantir l'existence des stratégies d'équilibre proposées dans la section 3.5.4. La borne inférieure η_k^{\min} sur le gain du canal vient du fait qu'en communication sans-fil, la sensibilité du récepteur est finie : en dessous d'un certain seuil (en termes de rapport "signal sur interférence plus bruit" (RSIB)) la communication n'est plus possible et le transmetteur n'est plus actif. La borne supérieure η_k^{\max} modélise la distance minimale entre le transmetteur et le récepteur. Le niveau de puissance de transmission p_k appartient à un ensemble compact $[0, P_k^{\max}]$. Enfin, le récepteur est supposé mettre en œuvre un décodage avec un seul utilisateur. Chaque flot de symboles est décodé indépendamment des autres qui sont considérés comme du bruit.

3.3 Jeu du contrôle de puissance en un coup

Nous présentons, dans cette section les résultats issus de [32] pour le jeu du contrôle de puissance en un coup et non-coopératif. Introduisons tout d'abord, quelques notations. R_k désigne le taux de transmission d'informations (en bits par seconde) pour l'utilisateur $k \in \mathcal{K}$ et f désigne une fonction d'efficacité représentant la probabilité de transmission réussie par bloc. Elle est supposé être sigmoïdale et identique pour tous les utilisateurs (par exemple $f(x) = (1 - e^{-x})^M$). La pertinence de l'hypothèse sigmoïdale est étudiée dans [60, 28] et récemment dans [7]. A un instant donné, le rapport "signal sur interférence plus bruit", noté RSIB_k pour le récepteur $k \in \mathcal{K}$ s'écrit :

$$\text{RSIB}_k = \frac{p_k \eta_k}{\sum_{j \neq k} p_j \eta_j + \sigma^2}, \quad (3.2)$$

où p_k est le niveau de puissance de l'émetteur $k \in \mathcal{K}$. Grâce à ces notations, le jeu statique du contrôle de puissance, noté G , est défini comme suit.

Définition 3.1 (Le jeu statique du contrôle de puissance) Le jeu statique du contrôle de puissance est un triplet $G = (\mathcal{K}, (\mathcal{A}_k)_{k \in \mathcal{K}}, (u_k)_{k \in \mathcal{K}})$ où \mathcal{K} est l'ensemble des joueurs, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_K$ sont les ensembles d'actions $\mathcal{A}_k = [0, P_k^{\max}]$ et P_k^{\max} est la puissance de transmission maximale pour le joueur $k \in \mathcal{K}$. Les fonctions d'utilité u_1, \dots, u_K des différents joueurs sont définies par l'équation suivante :

$$u_k(p_1, \dots, p_K) = \frac{R_k f(\text{RSIB}_k)}{p_k} \text{ [bit/J]}. \quad (3.3)$$

Le jeu G est connu de tous les joueurs et ceux-ci sont rationnels. Le concept de solution le plus pertinent est celui de l'équilibre de Nash (voir définition 2.1). Les stratégies d'équilibre sont mutuellement optimales, c'est-à-dire qu'aucune déviation unilatérale n'est profitable. Lorsqu'il existe, l'équilibre de Nash non-saturé de ce jeu s'obtient en annulant la dérivée $\frac{\partial u_k}{\partial p_k}$. Le terme "équilibre de Nash non-saturé" signifie que la puissance d'émission maximale pour chaque utilisateur, notée P_k^{\max} , est suffisamment élevée pour ne pas être atteinte à l'équilibre [62]. Le rapport "signal sur interférence plus bruit" RSIB $_k$ optimal pour l'émetteur $k \in \mathcal{K}$ est égal à la solution de l'équation suivante :

$$xf'(x) - f(x) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (3.4)$$

Cette solution est indépendante de l'indice $k \in \mathcal{K}$ des joueurs puisque la fonction sigmoïdale est commune aux joueurs [28].

$$p_k^* = \frac{\sigma^2}{\eta_k} \frac{\beta^*}{1 - (K-1)\beta^*}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad (3.5)$$

où β^* est l'unique solution de l'équation $xf'(x) - f(x) = 0$. Dans ce chapitre nous supposons que $p_k^* \leq P_k^{\max}$ pour tous les joueurs $k \in \mathcal{K}$. Dans le cas inverse (cas saturé), la puissance d'équilibre est la puissance maximale. Remarquons que les joueurs ne doivent connaître que le gain de leur propre canal η_k pour mettre en œuvre la stratégie d'équilibre. L'utilité à l'équilibre est donnée par l'équation suivante :

$$u_k^* = \frac{\eta_k f(\beta^*)(1 - (K-1)\beta^*)}{\sigma^2 \beta^*}, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (3.6)$$

Le gain du canal η_k du joueur $k \in \mathcal{K}$ est facteur de l'utilité à l'équilibre de Nash. Cette utilité est directement proportionnelle au gain du canal η_k .

3.4 Jeu du contrôle de puissance avec hiérarchie

Nous passons en revue quelques résultats clés de [62] et de [39] concernant l'équilibre de Stackelberg. La particularité du jeu de Stackelberg est la suivante. Avant de jouer, certains joueurs observent les actions que d'autres joueurs ont déjà choisies. Supposons qu'il existe K utilisateurs actifs (joueurs) dans le réseau. Ces utilisateurs sont divisés en deux groupes : ceux qui jouent en premier font partie de l'ensemble des meneurs $\mathcal{L} = \{1, \dots, L\}$ et ceux qui jouent en second font partie de l'ensemble des suiveurs $\mathcal{F} = \{L+1, \dots, K\}$. Un suiveur choisit l'action qui maximise son utilité en connaissant à l'avance, celle que va jouer le meneur. Bien évidemment, les meneurs anticipent cette réaction et choisissent l'action pour laquelle la réaction des suiveurs sera optimale. Notons $L = |\mathcal{L}|$ le nombre de meneurs et $F = |\mathcal{F}|$ le nombre de suiveurs tel que $K = L + F$. Les vecteurs d'actions sont notés $\mathbf{p}_{\mathcal{L}} \triangleq (p_1, \dots, p_L)$ pour les meneurs et $\mathbf{p}_{\mathcal{F}} \triangleq (p_{L+1}, \dots, p_K)$ pour les suiveurs. Le jeu considéré possède deux niveaux d'équilibre :

- (i) l'équilibre des suiveurs qui dépend des actions jouées par les meneurs,
- (ii) l'équilibre des meneurs qui choisissent leurs actions d'équilibre en anticipant la réaction optimale des suiveurs.

Afin de définir l'équilibre de Stackelberg (SE), notons $\mathcal{U}^*(\mathbf{p}_{\mathcal{L}})$ l'ensemble des équilibre des suiveurs lorsque les meneurs jouent les puissances $\mathbf{p}_{\mathcal{L}}$. Ensuite, se déroule un jeu entre-meneurs où l'équilibre de Nash des meneurs est basé sur l'équilibre de Nash des suiveurs. Une telle situation d'équilibre pour les meneurs et les suiveurs est un équilibre de Stackelberg (SE) dont l'utilité est notée $u^{*SE} \in \mathcal{U}^{*SE}$.

Définition 3.2 (Équilibre de Stackelberg) Un vecteur d'actions $\mathbf{p}^{SE} = (\mathbf{p}_{\mathcal{L}}^{SE}, \mathbf{p}_{\mathcal{F}}^{SE})$ est un équilibre de Stackelberg, si les actions des suiveurs $\mathbf{p}_{\mathcal{F}}^{SE} \in \mathcal{U}^*(\mathbf{p}_{\mathcal{L}}^{SE})$ forment un équilibre de Nash pour les suiveurs et si les actions des meneurs $\mathbf{p}_{\mathcal{L}}^{SE}$ forment un équilibre de Nash pour les meneurs. Les actions de l'équilibre de Stackelberg sont obtenues par le problème d'optimisation couplé à deux niveaux :

$$p_{\ell}^{SE} \in \arg \max_{p_{\ell}} u_{\ell}(p_{\ell}, \mathbf{p}_{-\ell}^{SE}, p_L^{SE}(p_{\ell}, \mathbf{p}_{-\ell}^{SE}), \dots, p_K^{SE}(p_{\ell}, \mathbf{p}_{-\ell}^{SE})), \forall \ell \in \mathcal{L} \quad (3.7)$$

avec pour tout $\mathbf{p}_{\mathcal{L}}$,

$$p_f^{SE}(\mathbf{p}_{\mathcal{L}}) = \arg \max_{p_f} u_f(\mathbf{p}_{\mathcal{L}}, p_L^{SE}(\mathbf{p}_{\mathcal{L}}), \dots, p_{f-1}^{SE}(\mathbf{p}_{\mathcal{L}}), p_f, p_{f+1}^{SE}(\mathbf{p}_{\mathcal{L}}), \dots, p_K^{SE}(\mathbf{p}_{\mathcal{L}})), \forall f \in \mathcal{F} \quad (3.8)$$

L'existence et l'unicité de l'équilibre de Stackelberg à deux niveaux avec L meneurs et F suiveurs sont garantis par la proposition 3.3. Notons γ_L^* et β^* les RSIB à l'équilibre de Stackelberg des meneurs et des suiveurs.

Proposition 3.3 (Caractérisation) Il existe un unique équilibre de Stackelberg \mathbf{p}^{SE} pour le jeu du contrôle de puissance avec deux niveaux de hiérarchie comprenant L meneurs et F suiveurs, i.e.,

$$p_{\ell}^{SE} = \frac{\sigma^2}{g_{\ell}} \frac{N\gamma_L^*(N + \beta^*)}{N^2 - N(F - 1)\beta^* - [(N + \beta^*)(L - 1) + F\beta^*]\gamma_L^*}, \forall \ell \in \mathcal{L}, \quad (3.9)$$

$$p_f^{SE} = \frac{\sigma^2}{g_f} \frac{N\beta^*(N + \gamma_L^*)}{N^2 - N(F - 1)\beta^* - [(N + \beta^*)(L - 1) + F\beta^*]\gamma_L^*}, \forall f \in \mathcal{F}, \quad (3.10)$$

où β^* est l'unique solution strictement positive de l'équation $xf'(x) = f(x)$, et γ_L^* est l'unique solution strictement positive de l'équation $x(1 - \epsilon_L x)f'(x) = f(x)$, avec

$$\epsilon_L = \frac{F\beta^*}{N^2 - N(F - 1)\beta^*}.$$

L'équilibre \mathbf{p}^{SE} est unique si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x)}{f'(x)} > 2\epsilon_L,$$

(ii) l'équation $x(1 - \epsilon_L x)f'(x) - f(x) = 0$ possède un unique maximum dans l'intervalle $]0, \beta^*[$.

La démonstration est donnée dans [39]. Les performance individuelles des meneurs et des suiveurs sont étudiées. Les auteurs montrent que les performance de chaque émetteur et donc du système global augmentent par rapport à l'équilibre de Nash du jeu en un coup. Soit A et B deux vecteurs d'utilité. Nous notons $A \succ B$ lorsque le vecteur A domine au sens de Pareto (définition 2.5) le vecteur B .

Proposition 3.4 (SE \succ NE) À l'équilibre de Stackelberg (SE), les suiveurs et les meneurs augmentent leurs utilité par rapport à l'équilibre de Nash du jeu en un coup.

Les puissances de transmission à l'équilibre de Stakelberg sont inférieures à celles de l'équilibre de Nash pour le meneur et le suiveur. Les utilités s'en trouvent augmentées.

3.5 Jeu du contrôle de puissance répété

3.5.1 Hypothèses d'information stratégique

Nous montrons que, dans le régime non-saturé (voir la section 3.3), le jeu du contrôle de puissance efficace énergétiquement possède d'intéressantes propriétés. Seule la connaissance individuelle de l'état du canal $\eta_k \in \Theta$ est requise à l'émetteur $k \in \mathcal{K}$. Dans la littérature, cette propriété est généralement supposée vraie (voir [32, 27, 62]). Il s'avère que cette condition est due à la structure des fonctions d'utilité du jeu en un coup. Si l'on considère un jeu auxiliaire avec le changement de variable suivant $a_k = p_k \eta_k$ et les utilités normalisées $\hat{u}_k(a_1, \dots, a_K)$,

$$\hat{u}_k(a_1, \dots, a_K) = \frac{R_k f\left(\frac{a_k}{\sum_{j \neq i} a_j + \sigma^2}\right)}{a_k}, \quad (3.11)$$

$$= \frac{R_k f\left(\frac{p_k \eta_k}{\sum_{j \neq i} p_j \eta_j + \sigma^2}\right)}{p_k \eta_k}, \quad (3.12)$$

$$= \frac{u_k(p_1, \dots, p_K)}{\eta_k}. \quad (3.13)$$

alors, les gains des canaux n'interviennent plus dans les fonctions d'utilité. Ceci montre que l'aspect stratégique du jeu ne dépend pas des gains des canaux. Ces paramètres stochastiques ne jouent un rôle que lorsque les joueurs "dé-normalisent" leurs actions

et calculent $p_k = \frac{a_k}{\eta_k}$. En conclusion, la connaissance individuelle de l'état du canal η_k est suffisante pour jouer dans le jeu normalisé. Supposons également que les joueurs observent, après chaque étape, le signal public $\omega \in \Omega$.

$$\omega = \sigma^2 + \sum_{k=1}^K \eta_k p_k \in \Omega. \quad (3.14)$$

Ce signal public permet à chaque joueur de retrouver le rapport RSIB. En effet, chacun connaît le gain de son propre canal η_k , sa puissance d'émission p_k et le signal ω .

$$\text{RSIB}_k = \frac{p_k \eta_k}{\omega - p_k \eta_k}, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (3.15)$$

Nous montrons, grâce à la formulation du jeu répété, que la connaissance à chaque étape du gain du canal ainsi que du RSIB permet de mettre en œuvre un plan de coopération entre les émetteurs qui soit efficace et qui satisfasse une condition d'équilibre.

3.5.2 Jeu répété pour le jeu du contrôle du puissance

Dans le jeu du contrôle de puissance en un coup, chaque émetteur observe le gain du canal associé à l'exemple du bloc courant η_k et met à jour sa puissance de transmission en fonction de l'équation (3.5). Dans le jeu répété, les joueurs maximisent l'utilité sur le long terme. Les notions d'étape du jeu, d'histoire publique et privée et de stratégie d'un joueur que nous avons définies au chapitre 2 sont ici appliquées. Les étapes du jeu correspondent aux instants où les joueurs choisissent la puissance de transmission. Pour le cas du contrôle de puissance "lent" (CPL), les étapes du jeu coïncident avec les blocs de transmission. Dans ce cas, les gains des canaux sont constants sur la durée du jeu. Pour le cas du contrôle de puissance "rapide" (CPR), les étapes du jeu coïncident avec des sous-blocs comprenant un ou plusieurs symboles, à l'intérieur du bloc de transmission. Dans ce cas, les gains des canaux varient d'une étape à l'autre suivant un processus stochastique. Le modèle considéré est un jeu répété avec observation du signal public ω . Les articles [29] (voir la sous-section 2.5.2.4) et [73] fournissent une caractérisation des utilités d'équilibre lorsque les joueurs observent un signal public ω qui appartient à l'ensemble

$$\Omega = \left[\sigma^2, \sigma^2 + \sum_{k=1}^K \eta_k^{\max} P_k^{\max} \right]. \quad (3.16)$$

L'histoire h_k^t du joueur $k \in \mathcal{K}$ jusqu'à l'étape $t \geq 1$ est la suite de puissances de gains du canal et des signaux reçus par le joueur $k \in \mathcal{K}$ jusqu'à l'étape $t - 1$. L'histoire est notée :

$$h_k^t = (\omega(1), p_k(1), \eta_k(1), \dots, \omega(t-1), p_k(t-1), \eta_k(t-1), \eta_k(t)), \quad (3.17)$$

et appartient à l'ensemble

$$H^t = \Omega^{t-1} \times \mathcal{A}_k^{t-1} \times \Theta_k^t. \quad (3.18)$$

Une stratégie est toujours définie en partant de "ce que l'on sait" h_k^t vers "ce que l'on fait" $p_k(t)$. A chaque étape $t \geq 1$, le joueur $k \in \mathcal{K}$ choisit une puissance de transmission en fonction de l'histoire des signaux publics et des actions choisies.

Définition 3.5 (Stratégie du jeu répété) Une stratégie pure τ_k pour le joueur $k \in \mathcal{K}$ est une suite de fonctions $\tau_k = (\tau_k^t)_{t \geq 1}$ avec à chaque étape $t \geq 1$,

$$\tau_k^t : \begin{cases} H_t & \rightarrow [0, P_k^{\max}] \\ h_k^t & \mapsto p_k(t). \end{cases} \quad (3.19)$$

Le vecteur de stratégies de $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_K)$ désigne une stratégie jointe et appartient à l'ensemble \mathcal{T} . Une stratégie jointe τ induit de manière naturelle un unique plan d'actions $(p(t))_{t \geq 1}$. A l'étape $t \geq 1$ chaque profil d'actions $p(t) = (p_1(t), \dots, p_K(t))$ fournit une utilité instantanée $u_k(p(t))$ pour le joueur $k \in \mathcal{K}$. Dans le jeu répété, les joueurs ne se soucient pas seulement de ce qu'ils obtiennent à une étape donnée, mais surtout de ce qu'ils obtiennent dans la durée. Plus précisément, nous considérons deux fonctions d'utilité de long terme, à savoir le jeu répété fini (JRF) et le jeu répété escompté (JRE).

Définition 3.6 (Utilités du jeu répété) Soit $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_K)$ une stratégie jointe. La fonction d'utilité pour le joueur $k \in \mathcal{K}$ est définie par :

$$\gamma_k^T(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_k(p(t)) \quad \text{dans le jeu répété fini,} \quad (3.20)$$

$$\gamma_k^\lambda(\tau) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda(1-\lambda)^{(t-1)} u_k(p(t)) \quad \text{dans le jeu répété escompté.} \quad (3.21)$$

où $(p(t))_{t \geq 1}$ est le profil de puissance du plan d'action induit par la stratégie conjointe τ , avec $T \geq 1$ la durée du jeu répété fini (JRF), et $0 < \lambda < 1$ est le taux d'escompte ou encore la probabilité d'arrêt d'étape en étape pour le jeu répété escompté (JRE).

Les deux modèles de jeux répétés que nous considérons se complètent mutuellement. Lorsque la durée de la transmission est connue et/ou les transmetteurs évaluent uniformément les utilités d'étapes, alors nous considérerons le jeu répété fini (JRF). Lorsque les transmetteurs prennent en compte la sensibilité au retard du réseau [26] et/ou que la durée de la transmission est aléatoire, nous considérons le jeu répété escompté (JRE). Par exemple, dans [83], le jeu escompté permet d'évaluer différemment les gains présents et ceux à venir. Dans [71, 68] la durée de l'interaction T est une variable aléatoire entière et finie presque sûrement, dont la loi est connue des joueurs. Dans ce cas, λ peut

être considéré comme la probabilité d'arrêt du jeu d'étape en étape : la probabilité que le jeu s'arrête à l'étape $t \geq 1$ est donc $\lambda(1 - \lambda)(t - 1)$. Le jeu répété escompté capture cette durée aléatoire puisque la fonction γ_k^λ correspond à l'utilité espérée évaluée par rapport à la loi de cette durée T . Cela montre que le taux d'escompte est également utile pour modéliser un jeu de communication sans-fil, lorsque des joueurs entrent ou quittent le jeu de manière aléatoire. Remarquons également que le taux d'escompte peut modéliser un JRE hétérogène où les joueurs ont des facteurs d'actualisation différents, auquel cas λ représente $\max_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k$ (comme souligné dans [68]). Dans la pratique, un tel paramètre peut être connu des joueurs à l'aide d'un signal public envoyé à partir du récepteur.

Définition 3.7 (Équilibre du jeu répété) Une stratégie jointe τ supporte un équilibre du jeu répété défini par $\Gamma = (\mathcal{K}, (\mathcal{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}, (\gamma_k)_{k \in \mathcal{K}})$ si :

$$\gamma_k(\tau'_k, \tau_{-k}) \leq \gamma_k(\tau), \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall \tau'_k \in \mathcal{T}_k, \quad (3.22)$$

où γ_k égale γ_k^T ou γ_k^λ , $-k$ est la notation standard pour l'ensemble des joueurs $\mathcal{K} \setminus \{k\}$; ici $\tau_{-k} = (\tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \dots, \tau_K)$.

Dans la section suivante 3.5.3, nous montrons que les stratégies du jeu répété possèdent plusieurs propriétés intéressantes pour les réseaux sans-fil : (a) seule la connaissance du gain de son propre canal permet au joueur $k \in \mathcal{K}$ de jouer la stratégie d'équilibre, (b) l'utilité proposée est équitable en termes de RSIB, (c) il est Pareto-efficace pour un large ensemble de paramètres ; (d) il est plus efficace que le point d'équilibre de Stackelberg du jeu avec hiérarchie de [62] sous certaines conditions, (e) il est toujours plus efficace que l'équilibre de Nash dans le jeu en un coup G , (f) Dans le cas des jeux répétés escomptés, c'est un équilibre parfait en sous-jeu (cette notion sera expliquée à la sous-section 3.5.4). L'équilibre correspondant repose sur un plan de coopération exploitant deux vecteurs d'utilité du jeu en un coup : le point d'équilibre de Nash présenté à la section 3.3 et le point de coopération pour lequel une étude détaillée est requise.

3.5.3 Point de coopération intéressant pour le jeu en un coup G

L'ensemble des utilités réalisables est noté $\mathcal{U}_G \subset \mathbb{R}^K$ et correspond à l'évaluation des fonctions d'utilité (u_1, \dots, u_K) avec les puissance admissibles (p_1, \dots, p_K) où $p_k \in [0, P_k^{\max}]$, $k \in \mathcal{K}$. Nous considérons les profils de puissance (p_1, \dots, p_K) qui vérifient la relation $p_k \eta_k = p_j \eta_j$ pour tout $(k, j) \in \mathcal{K}^2$ et qui maximisent les fonctions d'utilité. Les puissances que l'on considère sont solutions du système d'équations suivant :

$$\forall (k, j) \in \mathcal{K}^2, \quad \frac{\partial u_k}{\partial p_k}(p) = 0 \quad \text{with} \quad p_k \eta_k = p_j \eta_j. \quad (3.23)$$

L'existence et l'unicité de la solution de ce système sont garanties si la condition suivante est vérifiée :

Il existe $x_0 \in]0, \frac{1}{K-1}[$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{2(K-1)}{1-(K-1)x} & \text{ est strictement positif sur }]0, x_0[, \\ & \text{ est strictement négatif sur }]x_0, \frac{1}{K-1}]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Cette condition est satisfaite pour les fonctions d'efficacité $f(x) = (1 - e^{-x})^M$ [64] et $f(x) = e^{-\frac{c}{x}}$ [7] où $c = 2^R - 1$ et R est le débit de la transmission. Si cette condition est trop restrictive, il est toujours possible de trouver une condition numérique (voir [64, 7]). Supposons que la condition (3.24) soit vérifiée, la solution de l'équation (3.23) est définie par :

$$\tilde{p}_k = \frac{\sigma^2}{\eta_k} \frac{\tilde{\gamma}}{1 - (K-1)\tilde{\gamma}}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad (3.25)$$

où $\tilde{\gamma}$ est l'unique solution de

$$x[1 - (K-1) \cdot x]f'(x) - f(x) = 0. \quad (3.26)$$

L'utilité du point de coopération est donnée par :

$$\tilde{u}_k = \frac{\eta_k f(\tilde{\gamma})(1 - (K-1)\tilde{\gamma})}{\sigma^2 \tilde{\gamma}}, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (3.27)$$

Le gain du canal η_k du joueur $k \in \mathcal{K}$ est facteur de l'utilité au point de coopération. Cette utilité \tilde{u}_k est directement proportionnelle au gain du canal η_k . Il est important ici de distinguer entre la condition d'égalité de RSIB imposée (3.23) et l'équilibre du jeu en un coup qui lui aussi satisfait cette condition. La condition (3.23) impose, au RSIB, une structure particulière.

$$\text{RSIB}_k = \frac{\eta_k p_k}{\sigma^2 + (K-1)\eta_k p_k}. \quad (3.28)$$

Par conséquent, chaque émetteur maximise une fonction d'utilité $u_k(p'_k)$ avec une seule variable.

$$p'_k = p_k \times \left(\left| \frac{g_k}{g_1} \right|^2, \left| \frac{g_k}{g_2} \right|^2, \dots, \left| \frac{g_k}{g_K} \right|^2 \right). \quad (3.29)$$

Le point de coopération (PC), donné par l'équation (3.25), est équitable pour le RSIB puisque pour chaque émetteur $k \in \mathcal{K}$, $\text{RSIB}_k = \tilde{\gamma}$. Une autre question se pose, à savoir : est ce que la solution coopérative est efficace en termes d'utilité ? Pour répondre à cette question, nous procédons en trois étapes. Premièrement, nous montrons que les utilités

de coopération sont optimales au sens de Pareto lorsque les gains des canaux sont fixés. Deuxièmement, nous fournissons des conditions suffisantes pour lesquelles les utilités de coopération Pareto-dominent les utilités de l'équilibre de Stackelberg [62]. Troisièmement, nous montrons que le point de coopération (PC) Pareto-domine les utilités d'équilibre du jeu en un coup.

Proposition 3.8 (Pareto-optimalité du point de coopération) *Soit \mathcal{U}_G la région des utilités atteignables pour le jeu G . Les utilités du point de coopération $(\tilde{u}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ sont Pareto-optimales pour le contrôle de puissance lent lorsque les gains des canaux sont constants.*

Démonstration. Lorsque les gains des canaux sont constants, l'utilité jointe $\tilde{u} = (u_1(\tilde{p}), \dots, u_K(\tilde{p}))$ donnée par (3.25) maximise la somme pondérée $\sum_{k=1}^K w_k u_k$ si $w_k = \frac{1}{\eta_k}$. Remarquons que \tilde{u} est unique puisque la solution de $x[1 - (K-1)x]f'(x) - f(x) = 0$ est unique $\tilde{p} = \arg \max_p \sum_{k=1}^K \frac{u_k(p)}{\eta_k}$. Donc \tilde{u} est Pareto-optimale. \square

Lorsque les gains des canaux varient d'étape en étape, les joueurs doivent se coordonner pour atteindre la frontière Pareto-optimale. Pour ce faire, ils ont besoin de la connaissance de tous les gains des canaux. La caractérisation de la frontière Pareto-optimale de la région des utilités réalisables pour une fonction sigmoïdale arbitraire f est un problème difficile.

Proposition 3.9 (SE vs PC) *Soit p_k^L (resp. p_k^F) la puissance de l'émetteur $k \in \mathcal{K}$ à l'équilibre du jeu de Stackelberg de [62] lorsque $k \in \mathcal{K}$ est le meneur du jeu (resp. un suiveur du jeu). Notons u_k^L, u_k^F les utilités correspondantes. Ensuite, nous avons :*

$$u_k^L \leq \tilde{u}_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad (3.30)$$

$$\exists K_0, \forall K \geq K_0, \quad u_k^F \leq \tilde{u}_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (3.31)$$

La première conclusion indique que l'émetteur préfère toujours jouer la puissance du point de coopération plutôt que d'être un meneur du jeu de Stackelberg [62]. La deuxième conclusion indique que cela est également vrai pour les suiveurs lorsque le réseau atteint une certaine taille en termes d'utilisateurs. Toutes les simulations que nous avons effectuées ont montré que l'utilité de coopération domine l'utilité du suiveur dès que $K \geq 3$.

Proposition 3.10 (NE vs PC) *Pour chaque joueur, l'utilité de coopération est supérieure à celle de l'équilibre de Nash du jeu en un coup.*

$$u_k^* \leq \tilde{u}_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (3.32)$$

Cette proposition montre que les transmetteurs préfèrent toujours la stratégie de coopération du jeu répété plutôt que la stratégie optimale du jeu en un coup. Dans la section suivante 3.5.4, nous verrons comment mettre en œuvre une stratégie d'équilibre du jeu répété fini ou escompté qui garantit l'utilité de coopération \tilde{u}_k pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$.

3.5.4 Stratégies d'équilibre du jeu répété

Nous présentons deux théorèmes qui fournissent des stratégies d'équilibre dont l'utilité de long terme est le point de coopération Pareto-optimal de la section 3.5.3. Les deux théorèmes correspondent aux modèles de jeu répété fini (JRF) et escompté (JRE).

Théorème 3.11 (Première contribution) Soit T_0 un entier. Supposons que la condition suivante soit vraie, $T \geq T_0$ avec :

$$T_0 = \left\lceil \frac{\eta_k^{\max} \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} - \eta_k^{\min} \frac{f(\tilde{\gamma})[1-(K-1)\tilde{\gamma}]}{\tilde{\gamma}}}{\eta_k^{\min} \frac{f(\beta^*)[1-(K-1)\beta^*]}{\beta^*} - \frac{\eta_k^{\max} f(\beta^*)}{\beta^* (\sum_{j \neq k} P_j^{\max} \eta_j^{\min} + \sigma^2)}} \right\rceil. \quad (3.33)$$

Alors, pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$, pour toute distribution de probabilités sur les gains des canaux, la stratégie suivante $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}}$ est un équilibre du jeu répété fini à T -étapes. A chaque étape $t \geq 1$:

$$\tau_k^t = \begin{cases} \tilde{p}_k & \text{si } t \in \{1, 2, \dots, T - T_0\}, \\ p_k^* & \text{si } t \in \{T - T_0 + 1, \dots, T\}, \\ P_k^{\max} & \text{si à l'étape précédente, RSIB}_k \neq \tilde{\gamma}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Théorème 3.12 (Première contribution) Supposons que la condition suivante soit vraie :

$$\lambda \leq \frac{\eta_k^{\min} \delta(\beta^*, \tilde{\gamma})}{\eta_k^{\min} \delta(\beta^*, \tilde{\gamma}) + \eta_k^{\max} [(K-1)f(\beta^*) - \delta(\beta^*, \tilde{\gamma})]}. \quad (3.35)$$

où $\delta(\beta^*, \tilde{\gamma}) = \frac{1-(K-1)\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} f(\tilde{\gamma}) - \frac{1-(K-1)\beta^*}{\beta^*} f(\beta^*)$. Alors, pour tout joueur $k \in \mathcal{K}$, pour toute distribution de probabilités sur les gains des canaux, la stratégie suivante $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathcal{K}}$ est un équilibre parfait en sous-jeu du jeu répété escompté. A chaque étape $t \geq 1$:

$$\tau_k^t = \begin{cases} \tilde{p}_k & \text{si à l'étape précédente RSIB}_k = \tilde{\gamma}, \\ p_k^* & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.36)$$

Ces théorèmes sont publiés dans [77] et les démonstrations sont données section 3.8.3.

□ *Premier commentaire (conditions d'équilibre).* Avant le début du jeu, les joueurs s'accordent sur un certain plan de coopération et de punition. Chaque émetteur $k \in \mathcal{K}$ transmet avec la puissance \tilde{p}_k tant qu'aucune déviation n'est détectée. Dans le cas contraire, il joue une puissance de transmission de manière à punir le déviateur (P_k^{\max} ou p_k^* selon le jeu répété que l'on considère). Les stratégies proposées sont des stratégies d'équilibre si le gain apporté par une déviation est inférieur à la perte induite par la punition des autres émetteurs. Pour s'assurer que ce plan de punition soit crédible, le jeu répété fini doit être suffisamment long et la probabilité d'arrêt de jeu répété escompté suffisamment faible. Ce qui explique la présence d'une borne inférieure T_0 sur T et d'une borne

supérieure λ_0 sur λ .

□ *Deuxième commentaire (plan de coopération)*. Dans le jeu répété escompté, le plan de la coopération consiste à transmettre en utilisant les puissances correspondant au point de coopération analysé à la section 3.5.3. Dans le jeu répété fini, le plan de coopération comporte une phase finale où les émetteurs jouent l'équilibre de Nash du jeu en un coup. En effet, le jeu ayant un nombre fini d'étapes, les joueurs qui dévient à la dernière étape du jeu ne pourraient jamais être punis. Si un joueur dévie à la fin du jeu, il peut arriver que la punition qu'il subit ne soit pas suffisamment sévère. Par conséquent, l'accord consistant à jouer l'équilibre du jeu en un coup durant la dernière phase du jeu permet de remédier à ce problème.

□ *Troisième commentaire (mécanisme de détection des déviations)*. Le plan de la coopération est réalisable si et seulement si les émetteurs sont capables de détecter une déviation unilatérale et de punir le déviateur. Il s'avère que, pour le jeu du contrôle de puissance, la connaissance du signal public $\omega \in \Omega$ est suffisante pour garantir une condition d'équilibre. En effet, lorsque les émetteurs jouent la puissance de coopération, le signal public équivaut à

$$\omega = \frac{2\sigma^2}{1 - (K-1)\tilde{\gamma}} \in \Omega. \quad (3.37)$$

Par conséquent, si un émetteur dévie de manière unilatérale de la stratégie τ prévue, le signal public $\omega(t)$ sera différent. Bien sûr, si plusieurs émetteurs s'écartent de l'équilibre de manière coordonnée, ce mécanisme de détection n'est plus aussi robuste. D'ailleurs, si nous voulions envisager ce type de déviation, le concept d'équilibre le plus pertinent serait l'équilibre fort [4, 53, 71] qui est robuste aux déviations coordonnées. Notre étude est focalisée, pour l'instant, sur les problèmes liés à l'équilibre de Nash et aux déviations unilatérales.

□ *Quatrième commentaire (procédure de punitions)*. Le plan de punitions du théorème 3.11 et celui du théorème 3.12 diffèrent sur plusieurs points. Pour le JRF, les émetteurs punissent le joueur qui dévie en transmettant avec une puissance maximale. Pour le JRE, la punition consiste à jouer l'équilibre de Nash du jeu en un coup. La punition à l'équilibre de Nash possède un inconvénient puisque la punition est moins sévère et doit donc durer plus longtemps. Cependant, cette punition est crédible puisqu'elle garantit un équilibre parfait en sous-jeu [63]. C'est à dire que la propriété d'équilibre encore reste valable après toutes les suites d'actions, après toutes les histoires du jeu. Aucun joueur n'a intérêt à dévier du plan de punition puisque celui-ci consiste à jouer l'équilibre de Nash. Concernant les JRF, il est démontré dans [10] que la propriété d'équilibre parfait en sous-jeu ne peut pas être vérifiée pour le JRF car le jeu en un coup ne possède qu'un seul équilibre de Nash.

□ *Cinquième commentaire (condition d'équilibre et communications sans-fil)*. La condition d'équilibre que nous présentons est indépendante des statistiques du canal. Si ces dernières sont connues, il est possible d'affiner la borne supérieure λ_0 pour le taux d'escompte et la durée minimale T_0 pour la durée du jeu répété fini (voir les démonstra-

tions section 3.8.3 pour plus de détails). Les conditions sur la durée ou sur la probabilité d'arrêt d'une communication sont peu considérées dans la littérature. Pourtant, ces paramètres sont essentiels afin de déterminer l'issue d'une interaction stratégique. Les conditions de nos théorèmes (3.35, 3.33) peuvent être interprétées de deux manières différentes.

- Soit la dynamique du gain du canal η_k^{\min} et η_k^{\max} impose des conditions sur le taux d'escompte (JRE) ou la durée du jeu (JRF) pour garantir une condition d'équilibre. Ces valeurs η_k^{\min} et η_k^{\max} dépendent du scénario de propagation et de la technologie considérée. Dans des systèmes comme les réseaux WiFi, ces quantités correspondent généralement à la dynamique de perte de trajet, la sensibilité du récepteur et la distance minimale entre l'émetteur et le récepteur.
- Soit le taux d'escompte et la durée du jeu imposent des bornes inférieures et supérieures sur les gains des canaux. Ils peuvent être déterminés par les statistiques des flux d'informations ou la longueur des séquences d'apprentissage.

□ *Sixième commentaire (connaissance de tous les gains des canaux).* La stratégie que nous proposons est Pareto-optimale lorsque les gains des canaux ne varient pas. Dans le cas contraire, l'utilité de coopération moyennée n'est plus Pareto-optimale (voir figure 3.8). Dans le cas du contrôle de puissance rapide, i.e. avec des gains des canaux stochastiques, les joueurs ont besoin de connaître les gains de tous les canaux pour pouvoir atteindre des utilités Pareto-optimales. En effet, les puissances qui permettent d'atteindre ces utilités Pareto-optimales dépendent des états de tous les canaux. La section suivante 3.6 est consacrée à cette étude. Les joueurs connaissent tous les gains des canaux et nous montrons que le signal public $\omega \in \Omega$ permet de garantir un théorème Folk.

3.6 Le théorème Folk et le contrôle de puissance

Nous avons vu au chapitre 2 que le théorème Folk (voir théorèmes 2.8, 2.10 et 2.13) caractérise les utilités d'équilibre lorsque les joueurs observent parfaitement les actions passées. Le but de cette section est de démontrer un théorème Folk (voir le chapitre 2) pour le jeu du contrôle de puissance efficace énergétiquement. Nous considérons le jeu répété escompté 3.21 avec un signal public $\omega \in \Omega$ défini par l'équation (3.14). Ce signal est suffisamment riche pour retrouver le théorème Folk et caractériser la région maximale des utilités d'équilibre. Dans cette section, les joueurs connaissent les gains $\eta \in \Theta$ de tous les canaux. Leur comportement est étudié suivant deux approches.

La première, appelée le contrôle de puissance lent, est présentée à la section 3.6.1. Les gains des canaux sont tirés au début du jeu et restent fixes d'étape en étape.

La seconde, appelée le contrôle de puissance rapide, est présentée à la section 3.6.2. Les gains des canaux varient d'étapes en étapes suivant un processus stochastique.

Tout au long de la section 3.6, nous supposons que les espaces d'actions des joueurs sont discrets $\mathcal{A}_k = \{0, \dots, P_k^{\max}\}$ et que ces derniers observent les gains de tous les canaux.

3.6.1 Contrôle de puissance lent

Les gains des canaux $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_K)$ sont tirés au début du jeu et restent constant sur la durée du jeu. Le théorème Folk caractérise les utilités d'équilibre du jeu répété escompté lorsque les joueurs connaissent les gains de tous les canaux. Définissons les niveaux min-max et les utilités individuellement rationnelles. Le résultat principal de cette section établit que le signal public ω défini par l'équation (3.14) permet d'élargir à son maximum (noté \mathcal{U}_G^*) l'ensemble des utilités d'équilibre.

Définition 3.13 La meilleure réponse du joueur $k \in \mathcal{K}$ face à la stratégie p_{-k} est la suivante :

$$BR_k(p_{-k}) = \min \left(\frac{\beta^*}{\eta_k} \left(\sum_{j \neq k} \eta_j p_j + \sigma^2 \right), P_k^{\max} \right). \quad (3.38)$$

Le niveau min-max du joueur $k \in \mathcal{K}$ est noté v_k et défini par l'équation suivante :

$$v_k = \min_{p_{-k}} \max_{p_k} u_k(p_k, p_{-k}, \eta) \quad (3.39)$$

$$= \begin{cases} \frac{\eta_k f(\beta^*)}{\beta^* (\sum_{j \neq k} \eta_j P_j^{\max} + \sigma^2)} & \text{si } \beta^* (\sum_{j \neq k} \eta_j P_j^{\max} + \sigma^2) < \eta_k P_k^{\max}, \\ f\left(\frac{\eta_k P_k^{\max}}{\sum_{j \neq k} \eta_j P_j^{\max} + \sigma^2}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Définissons l'ensemble des utilités réalisables et individuellement rationnelles.

$$\mathcal{U}_G^* = \left\{ u \in \mathcal{U}_G \mid v_k \leq u_k, \quad \forall k \in \mathcal{K} \right\}. \quad (3.41)$$

L'ensemble \mathcal{U}_G^* est défini comme l'ensemble des utilités efficaces énergétiquement pour lesquelles chaque joueur reçoit une utilité supérieure à son niveau d'utilité min-max.

Théorème 3.14 (Première contribution) L'ensemble des utilités d'équilibre converge vers \mathcal{U}_G^* lorsque λ tend vers 0.

$$NE^\lambda \longrightarrow \mathcal{U}_G^*, \text{ lorsque } \lambda \longrightarrow 0. \quad (3.42)$$

Autrement dit, pour chaque vecteur d'utilité $u \in \mathcal{U}_G^*$, il existe un λ_0 tel que pour tout $\lambda < \lambda_0$, il existe une stratégie d'équilibre du jeu répété escompté dont l'utilité de long terme est égale à $u \in \mathcal{U}_G^*$.

Ce théorème est publié dans [76]. La preuve est basée sur [29] et est donnée section 3.8.5. Dans cet article, les auteurs utilisent des stratégies de programmation dynamique

difficilement implémentable. Cependant, la stratégie définie section 3.5.4 s'adapte facilement. Choisissons un vecteur d'utilité qui appartienne à \mathcal{U}_G^* et qui soit Pareto-optimal.

$$w_\eta(\alpha) = \max_{p \in A} \sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k u_k(p, \eta), \quad (3.43)$$

La stratégie d'équilibre consiste à jouer $\tilde{u}(\alpha)$ tant que personne ne dévie, puis punir à l'équilibre de Nash du jeu en un coup u^* si un joueur a dévié lors d'une étape précédente.

3.6.2 Contrôle de puissance rapide

Dans cette section, nous considérons un scénario dans lequel les gains des canaux $\eta \in \Theta$ suivent un processus stochastique $\pi(\eta'|\eta) \in \Theta$ d'étape en étape. A l'étape $t \geq 1$ la fonction d'utilité dépend des actions $p(t) \in \mathcal{A}$ et des canaux $\eta(t) \in \Theta$. Nous démontrons le théorème Folk (voir théorème 3.18) pour le jeu du contrôle de puissance rapide lorsque les joueurs observent un signal public $\omega \in \Omega$ et connaissent les gains de tous les canaux $\eta \in \Theta$. Cette étude est basée sur deux résultats récents provenant des jeux répétés stochastiques et publiés dans [41, 30]. Notre modèle est bien plus simple qu'un jeu répété stochastique puisque les états du jeu (ici les gains des canaux) ne dépendent pas des actions jouées (ici les puissances).

3.6.2.1 Déroulement du jeu

Le jeu commence à l'étape $t = 1$, avec un état initial $\eta(1)$ qui est connu des joueurs. Les émetteurs choisissent simultanément une puissance de transmission $p(1) = (p_1(1), \dots, p_K(1))$ et obtiennent un signal public $\omega(1) \in \Omega$. L'utilité d'étape, notée $u_k(p(1), \eta(1))$ n'est pas connue des joueurs. Après l'étape $t - 1$, les états des canaux sont tirés selon la distribution de probabilités $\pi(\cdot|\eta(t-1)) \in \Delta(\Theta)$ et la réalisation est annoncée publiquement : $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_K(t))$. Tenant compte de la l'histoire passée du jeu, les joueurs choisissent simultanément leurs actions $p_k(t)$ et reçoivent un signal public $\omega(t) \in \Omega$ et ainsi de suite. Nous définissons le vecteur d'histoire privée \tilde{h}_k^t et publique \tilde{h}^t du joueur $k \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_k^t &= (p_k(1), \omega(1), \eta(1), \dots, p_k(t-1), \omega(t-1), \eta(t-1), \eta(t)), \\ \tilde{h}^t &= (\omega(1), \eta(1), \dots, \omega(t-1), \eta(t-1), \eta(t)). \end{aligned}$$

Nous définissons l'histoire publique du jeu comme l'intersection de toutes les histoires privées. Notez que l'histoire privée du joueur $k \in \mathcal{K}$ contient l'histoire publique ainsi que la suite des puissances de transmission $(p_k(s))_{t-1 \geq s \geq 1}$ du joueur $k \in \mathcal{K}$. Le vecteur \tilde{h}^t appartient à l'ensemble

$$\tilde{H}_t = (\Omega \times \Theta)^{t-1} \times \Theta, \quad (3.44)$$

où la notation $(\cdot)^{t-1}$ désigne le produit cartésien d'ensemble.

Définition 3.15 (Stratégie du jeu répété) Une stratégie τ_k pour le joueur $k \in \mathcal{K}$ est une suite de fonctions $\tau_k = (\tau_{k,t})_{t \geq 1}$ avec à chaque étape $t \geq 1$,

$$\tau_{k,t} : \begin{cases} \tilde{H}_t & \rightarrow \Delta(\{0, P_k^{\max}\}) \\ \tilde{h}_k^t & \mapsto p_k(t). \end{cases} \quad (3.45)$$

Les espaces d'actions $\mathcal{A}_k = \{0, P_k^{\max}\}$ sont discrets. La stratégie est une suite de fonctions partant de l'histoire publique et qui renvoie une distribution de probabilités sur les puissances de transmission.

3.6.2.2 Propriété d'irréductibilité et indépendance de l'état initial

Une condition nécessaire pour que le théorème Folk s'applique est la propriété d'irréductibilité du processus des gains des canaux.

Définition 3.16 Soit η et η' deux gains des canaux et $\pi(\eta'|\eta)$ la probabilité qu'à l'étape successive, le gain du canal soit η' sachant que l'état actuel est η . La probabilité de transition π est irréductible si pour tous les gains des canaux η et η' , nous avons $\pi(\eta'|\eta) > 0$.

La mobilité dans les communications sans-fil impose que pour une réalisation de canal donnée, il y ait toujours une probabilité positive de tirer chaque gain du canal à la prochaine étape. Afin de caractériser l'ensemble des utilités d'équilibre, nous supposons que la probabilité de transition est irréductible. Comme dans la section précédente, nous supposons que le joueur n'observe pas les actions jouées par les autres joueurs aux étapes précédentes mais reçoivent un signal public $\omega(t) \in \Omega$ donné par l'équation (3.14).

Le tirage des canaux suit un processus stochastique irréductible. Donc, l'état initial des canaux n'influence pas le comportement asymptotique du tirage des canaux. Cette propriété garantit que l'ensemble limite des utilités réalisables, l'ensemble des utilités d'équilibre et les niveaux d'utilité min-max ne dépendent pas de l'état initial. Nous présentons ici les résultats provenant de [24] qui formalisent cette idée.

Théorème 3.17 (Indépendance de l'état initial [24]) Notons, \tilde{v}_k le niveau min-max du joueur $k \in \mathcal{K}$ dans le jeu répété stochastique. Supposons que le jeu répété stochastique soit irréductible (3.16), cela implique que :

- La limite des min-max est indépendante de l'état initial $\eta(1) \in \Theta$.

$$\tilde{v}_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_k^\lambda = \min_{\tau_{-k}} \max_{\tau_k} \gamma_k^\lambda(\tau_k, \tau_{-k}, \eta(1)), \quad \forall \eta(1) \in \Theta, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (3.46)$$

- L'ensemble limite des utilités réalisables est indépendant de l'état initial $\eta(1) \in \Theta$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{U}_G^\lambda(\eta(1)) = \mathcal{U}_G, \quad \forall \eta(1) \in \Theta. \quad (3.47)$$

- L'ensemble limite des utilités d'équilibre est indépendant de l'état initial $\eta(1) \in \Theta$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} NE^\lambda(\eta(1)) = NE, \quad \forall \eta(1) \in \Theta. \quad (3.48)$$

3.6.2.3 Résultat principal : le théorème Folk

Le théorème suivant affirme qu'une condition sur le taux d'escompte λ est suffisante pour garantir la propriété d'équilibre parfait en sous-jeu pour un vecteur d'utilité u dans \mathcal{U}_G^* .

Théorème 3.18 (Première contribution) *L'ensemble des utilités d'équilibre converge vers \mathcal{U}_G^* lorsque λ tend vers 0. Pour tout état initial $\eta(1) \in \Theta$, nous avons :*

$$NE^\lambda(\eta(1)) \longrightarrow \mathcal{U}_G^*, \text{ lorsque } \lambda \longrightarrow 0. \quad (3.49)$$

Autrement dit, pour chaque vecteur d'utilité $u \in \mathcal{U}_G^*$, il existe un λ_0 tel que pour tout $\lambda < \lambda_0$, il existe une stratégie d'équilibre du jeu répété escompté avec des gains stochastiques dont l'utilité de long terme est égale à $u \in \mathcal{U}_G^*$.

Ce théorème est publié dans [76]. La preuve est basée sur [41, 30, 42]. Elle est donnée dans la section 3.8.5. Le résultat du théorème 3.18 implique que tous les vecteurs d'utilité Pareto-optimaux qui sont individuellement rationnels peuvent être atteints par une stratégie d'équilibre lorsque le taux d'escompte est suffisamment petit. Notons $\mu \in \Delta(\Theta)$ la mesure invariante du processus stochastique π sur les gains des canaux. Une action d'étape a_k est une fonction partant des gains des canaux et allant vers les puissances choisies p_k .

$$a_k : \begin{cases} \Theta & \rightarrow \{0, \dots, P_k^{\max}\} \\ \eta & \mapsto p_k. \end{cases} \quad (3.50)$$

Notons p_k^η la puissance choisie par le joueur $k \in \mathcal{K}$ lorsque les gains des canaux sont η . Si chaque joueur joue une action d'étape définie par l'équation (3.50), qui dépend des états des canaux, alors le vecteur de puissance est noté p^η et l'utilité du joueur $k \in \mathcal{K}$ est définie comme suit :

$$\sum_{\eta \in \Theta} \mu(\eta) u_k(p^\eta, \eta). \quad (3.51)$$

Une utilité Pareto-optimale est définie comme un problème de maximisation avec les pondérations $(\alpha_k)_{k \in \mathcal{K}}$ sommant à 1. Notons $\tilde{p}^\eta(\alpha)$ la solution du problème suivant :

$$w_\mu(\alpha) = \max_{p^\eta \in A^{|\Theta|}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k \sum_{\eta \in \Theta} \mu(\eta) u_k(p^\eta, \eta). \quad (3.52)$$

et notons $\tilde{u}^\eta(\alpha)$ le vecteur d'utilité qui réalise le maximum dans l'équation (3.52). D'après le théorème 3.18, si $\tilde{u}^\eta(\alpha)$ est individuellement rationnelle, il existe un taux d'escompte λ et une stratégie d'équilibre $\tau(\alpha)$ dont l'utilité de long terme est $\tilde{u}^\eta(\alpha)$.

3.7 Résultats numériques

Dans cette section, nous considérons le même type de scénarios que dans [27, 62] à savoir le système CDMA aléatoire avec un facteur d'étalement égal à N , la fonction d'efficacité énergétique $f(x) = (1 - e^{-x})^M$ et les gains des canaux distribués selon une loi de Rayleigh.

★ Le premier scénario est simple mais traduit fidèlement les enjeux du problème. Soit $(K, M, N) = (2, 2, 2)$, alors la figure 3.2 représente la région des utilités normalisées réalisables (voir l'équation 3.11) du jeu en un coup (la normalisation des utilités permet d'effectuer des comparaisons équitables). Les utilités d'équilibre du jeu répété sont représentées par la région qui Pareto-domine les niveaux min-max. Quatre points importants sont à souligner : l'équilibre de Nash du jeu en un coup (cercle), l'équilibre de Stackelberg SE (étoile), le plan de coopération étudié à la section 3.5.3 PC (carré) et le point où l'utilité sociale (voir la définition 2.5) est maximisée (croix). Cette figure nous suggère qu'un gain significatif peut être obtenu en utilisant un modèle de jeu répété au lieu du modèle de jeu en un coup. Pour les utilités normalisées, le plan de coopération coïncide avec l'optimum social. Les théorèmes 3.12, 3.11, 3.14 et 3.18 nous permettent d'apporter les conclusions suivantes.

- Si les joueurs ne connaissent que le gain de leur propre canal η_k , ils obtiennent l'utilité de l'équilibre en un coup (cercle).
- Si les joueurs observent en plus le signal $\omega \in \Omega$, ils obtiennent l'utilité de coopération (carré).
- Si les joueurs observent en plus les gains de tous les canaux η , ils obtiennent, à l'équilibre, toutes les utilités de la région qui Pareto-dominent les niveaux min-max (bleue).

★ En considérant le même scénario, le lien entre le nombre des étapes du JRF (resp. la probabilité d'arrêt du JRE) et l'amplitude des gains du canal a été étudié. Les figures 3.3 (resp. 3.4). représentent la dynamique des gains du canal $10 \log_{10} \left(\frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}} \right)$ en fonction de T (resp. de λ) pour $M = 2$ et plusieurs couples de paramètres $(K, N) \in \{(2, 2), (4, 5), (10, 12)\}$. Dans les cas fini et escompté, le modèle de jeu répété semble être mieux adapté pour les scénarios où η_k modélise les effets de pertes par propagation, mais aussi les effets d'étalement. Évidemment, si le nombre d'étapes est trop faible ou la probabilité d'arrêt du jeu est trop élevée, d'autres modèles plus appropriés doivent être mis en œuvre [70].

★ Nous évaluons les gains de performance apportés par la formulation de type jeu répété, comparée à celle du jeu en un coup et celle du jeu de Stackelberg. Notons w_{NE} (resp. w_{SE} et w_{JRE}) l'efficacité de l'équilibre de Nash (resp. SE et l'équilibre RG) en termes d'utilité sociale, à savoir, la somme des utilités des joueurs. La figure 3.5 représente les quantités $\frac{w_{JRE}-w_{NE}}{w_{NE}}$ et $\frac{w_{SE}-w_{NE}}{w_{NE}}$ en pourcentage et en fonction de l'efficacité spectrale $\alpha = \frac{K}{N}$ avec $N = 128$ et $2 \leq K < \frac{N}{\beta^*} + 1$. Les asymptotes $\alpha_{max} = \frac{1}{\beta^*} + \frac{1}{N}$ sont indiquées en pointillés pour différentes valeurs de $M \in \{10, 100\}$. L'amélioration devient très importante lorsque la charge du système est proche de $\frac{1}{N} + \frac{1}{\beta^*}$. Ceci est dû au fait que la puissance utilisée à l'équilibre de Nash du jeu en un coup devient grande lorsque le système est utilisé par plus de transmetteurs K et possède moins de sous-canaux N . Comme expliqué dans [62] pour l'étude du jeu de Stackelberg, ces gains sont en fait limités par la puissance de transmission maximale.

★ Ensuite, la figure 3.6 représente le rapport $\frac{w_{FRG}}{w_{NE}}$ NE en fonction du nombre d'étapes du jeu fini (en moyenne sur les gains du canal). Considérant les paramètres suivants $(K, M, N) = (35, 10, 128)$, $P^{max} = 10^{-2}$ Watt, $\sigma^2 = 10^{-5}$ Watt, $10 \log_{10}(\frac{\eta_{max}}{\eta_{min}}) = 20$ et l'équation (3.33), un plan de coopération peut être mis en œuvre dès que $T_0 = 2852$ étapes. Cette courbe donne une intuition à propos de ce que peut gagner un émetteur en coopérant, le gain normalisé en termes d'utilités va de 1 à 6 selon le nombre d'étapes du jeu (resp. entre 2852 et 15000 étapes). Dans un système cellulaire où les niveaux de puissance sont mis à jour avec une fréquence typique de 1500 Hz, cela signifie que la coopération est une bonne option si plusieurs transmetteurs utilisent les mêmes ressources pour plus d'une seconde. Le rapport $\frac{w_{FRG}}{w_{NE}}$ a une limite lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ce dernier est facile à obtenir car

$$\frac{w_{FRG}}{w_{NE}} = \frac{\phi(\tilde{\gamma}) \sum_{k=1}^K R_k \sum_{t=1}^{T-T_0} |g_k(t)|^2 + \phi(\beta^*) \sum_{k=1}^K R_k \sum_{t=T-T_0+1}^T |g_k(t)|^2}{\phi(\beta^*) \sum_{k=1}^K R_k \sum_{t=1}^T |g_k(t)|^2}, \quad (3.53)$$

où $\phi(x) = \frac{f(x)}{x} [1 - (K-1)x]$. Il s'en suit que, pour un T_0 donné, $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{w_{FRG}}{w_{NE}} = \frac{\phi(\tilde{\gamma})}{\phi(\beta^*)}$.

★ La figure 3.2 étudie les performances du point de coopération pour le contrôle de puissance "rapide" CPR. Les gains des canaux varient d'étape en étape suivant une loi de probabilité tirée de manière indépendamment et identiquement distribué. Nous considérons un processus stochastique simple avec deux canaux : $(\eta, \eta') \in \{(7, 1), (1, 7)\}$. La probabilité de transition est constante sur les états des canaux : $\pi(\cdot) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et sa mesure invariante est $\mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Envisageons le scénario $(K, M, N) = (2, 2, 2)$. La figure 3.2 représente la région des utilités réalisables sur le long terme. Première remarque : la connaissance de tous les gains des canaux permet aux joueurs d'atteindre, à l'équilibre, des utilités Pareto-optimales. Quatre espérances d'utilité sont mises en évidence : celle de l'équilibre de Nash (cercle) du jeu en un coup étudiée dans [32], celle de l'équilibre de Stackelberg (étoile) étudiée dans [62], celle du point de coopération (carré) étudiée dans [77] et celle de l'optimum social (étoile). Cette figure nous montre que l'utilité d'équilibre du point de coopération n'est plus Pareto-optimale pour le jeu répété avec

gains des canaux stochastiques. Il est possible d'atteindre une région d'utilité beaucoup plus large à l'aide de la connaissance des gains de tous les canaux et du théorème 3.18.

★ Le dernier type de résultat numérique quantifie la performance de gain apportée par la formulation du jeu répété escompté avec des gains stochastiques (JRES). Nous considérons un processus stochastique simple où un joueur $k \in \mathcal{K}$, tiré avec une distribution uniforme sur les joueurs, possède un gain $\eta_k = 2$ plus élevé alors que les gains de tous les autres joueurs est $\eta_j = 1$. Nous calculons l'espérance d'utilité que les joueurs obtiennent à l'optimum social w_{JRES} . Notons w_{NE} (resp. w_{JRE} et w_{JRES}) l'efficacité sociale obtenue à l'équilibre de Nash du jeu en un coup (resp. à l'équilibre du jeu JRE et JRES) en termes de somme des utilités des joueurs. La figure 3.8 représente la quantité $\frac{w_{JRES}-w_{NE}}{w_{NE}}$ et $\frac{w_{JRE}-w_{NE}}{w_{NE}}$ en pourcentage dépendant de l'efficacité spectrale $\alpha_{max} = \frac{1}{\beta^*} + \frac{1}{N}$ avec $N = 128$ et $2 \leq K < \frac{N}{\beta^*} + 1$. Les asymptotes $\alpha_{max} = \frac{1}{\beta^*} + \frac{1}{N}$ sont indiquées par des pointillés pour des valeurs différentes $M \in \{10, 100\}$. L'amélioration devient très importante lorsque la charge du système est proche de $\frac{1}{N} + \frac{1}{\beta^*}$. Ceci est dû au fait que la puissance d'émission à l'équilibre de Nash du jeu en un coup augmente lorsque le système est de plus en plus chargé. Comme dans [62] pour l'étude du jeu de Stackelberg, ces gains sont en effet limités par la puissance de transmission maximale.

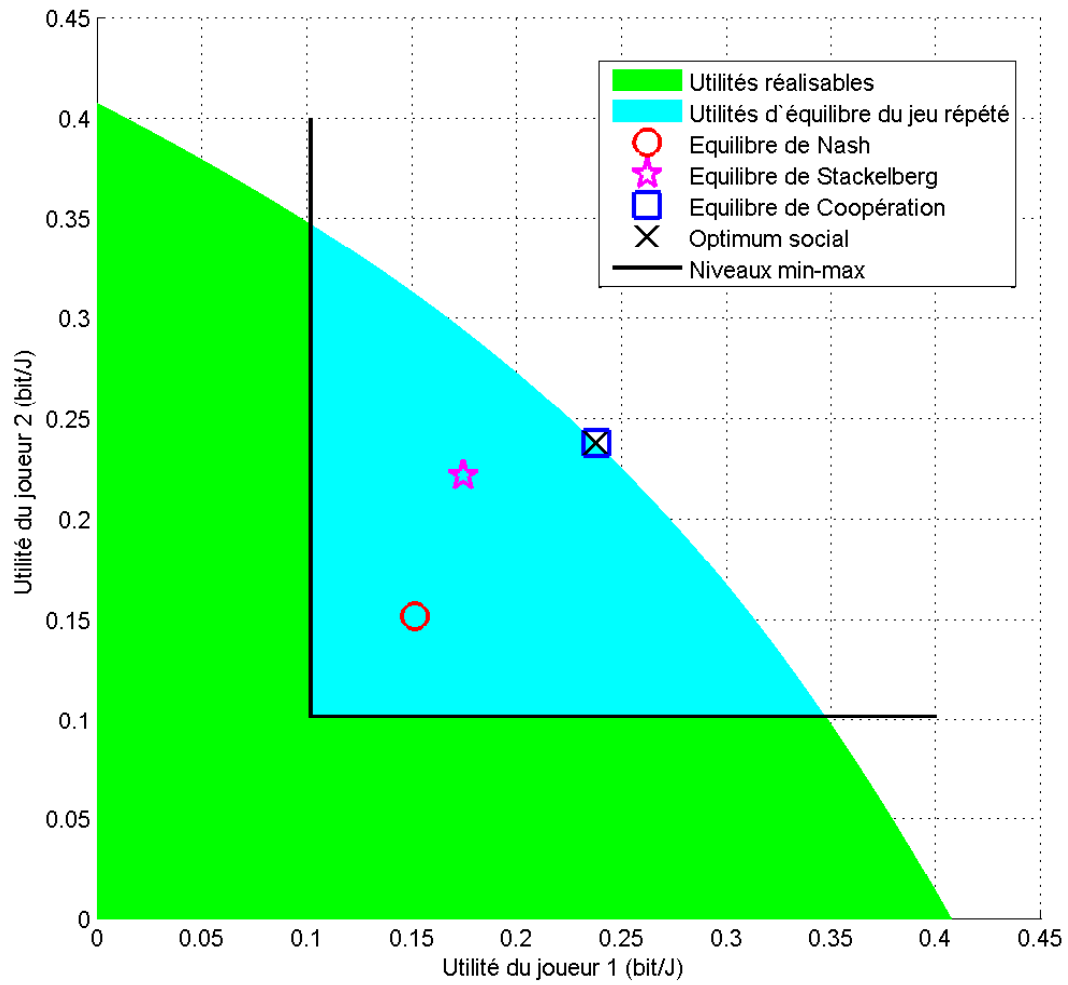


FIGURE 3.2 – Région des utilités normalisées \hat{u}_k atteignables pour $(K, M, N) = (2, 2, 2)$.

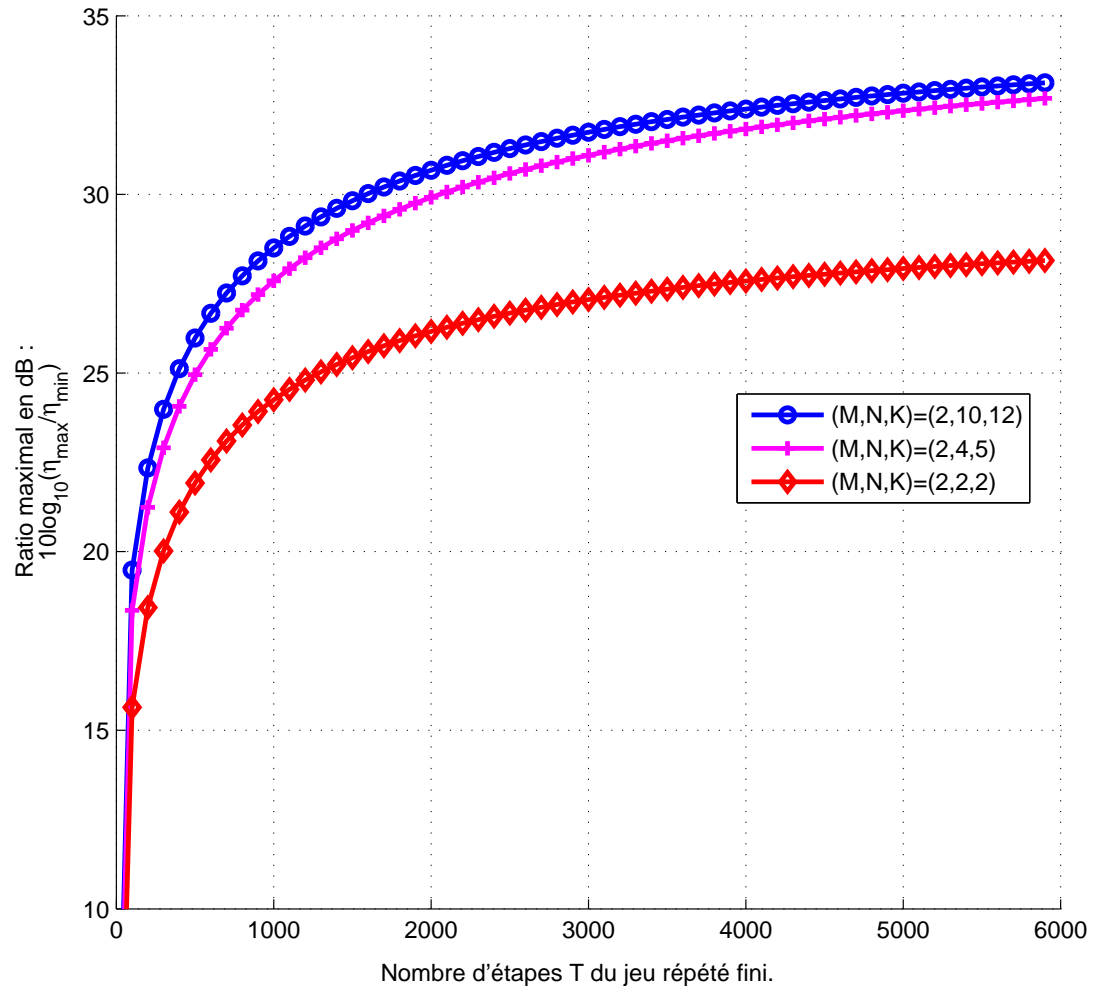


FIGURE 3.3 – Dynamique de gains du canal admissibles par rapport au nombre d'étapes du jeu pour $M = 2$ et $(K, N) \in \{(2, 2), (4, 5), (10, 12)\}$.

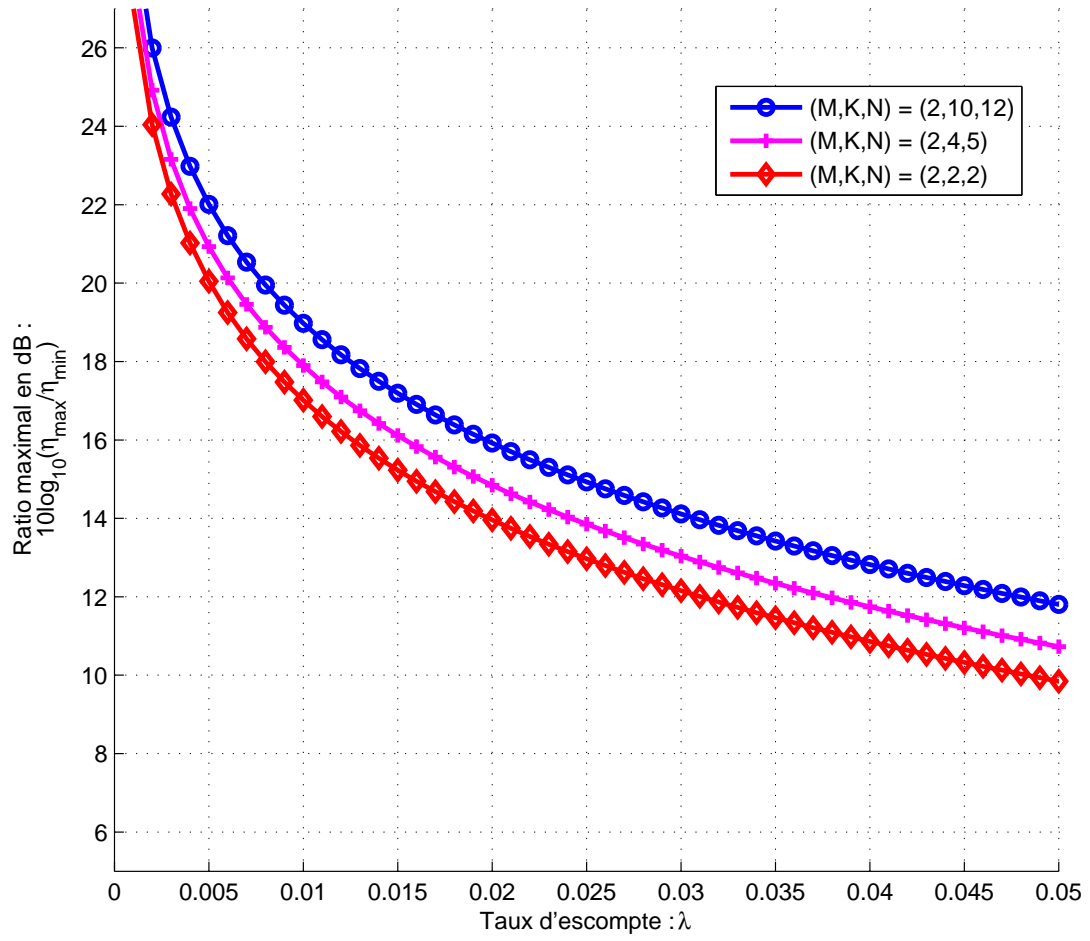


FIGURE 3.4 – Dynamique de gains du canal admissibles par rapport au taux d'escompte pour $M = 2$ et $(K, N) \in \{(2, 2), (4, 5), (10, 12)\}$.

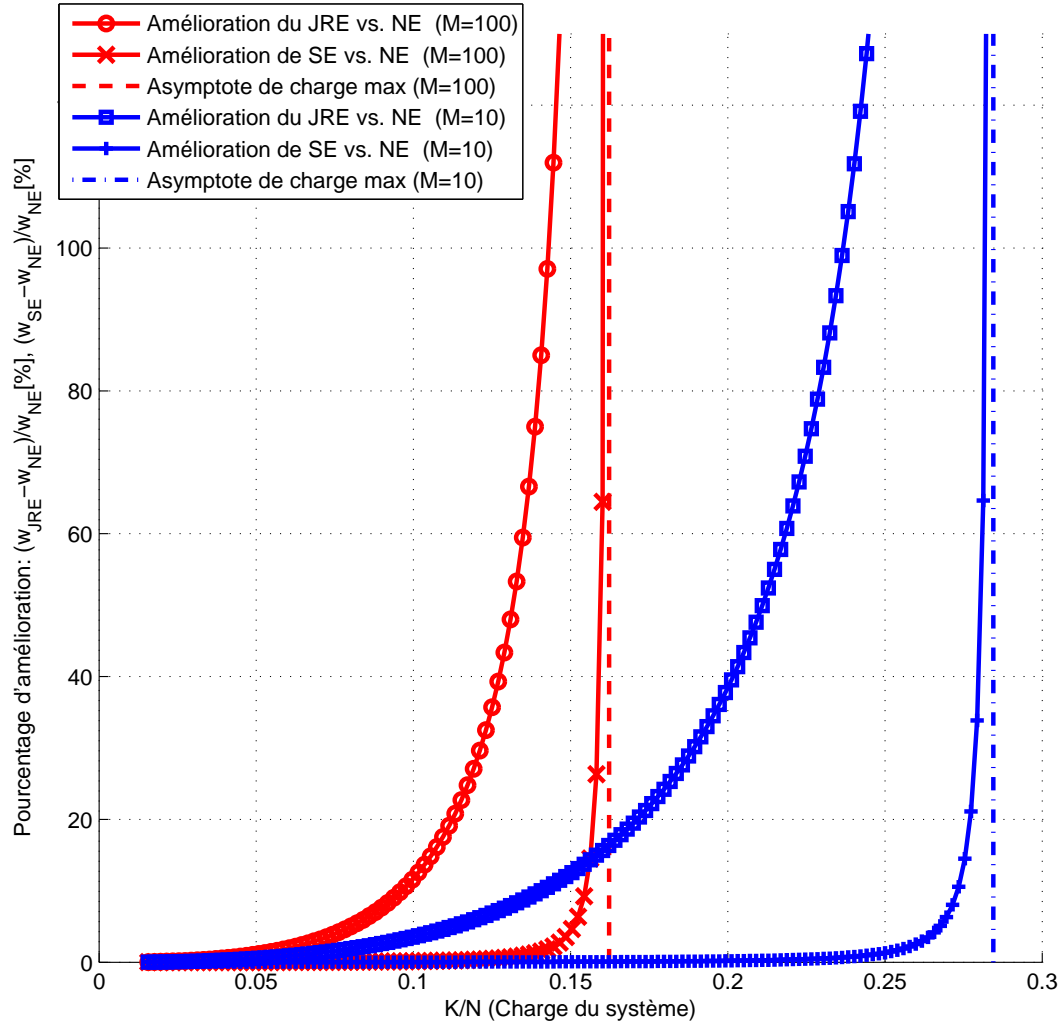


FIGURE 3.5 – Pourcentage d'amélioration de l'utilité sociale pour l'équilibre du jeu répété (w_{JRE}) et pour l'équilibre de Stackelberg (w_{SE}) par rapport à l'équilibre de Nash (w_{NE}) en fonction de la charge (K/N) du système.

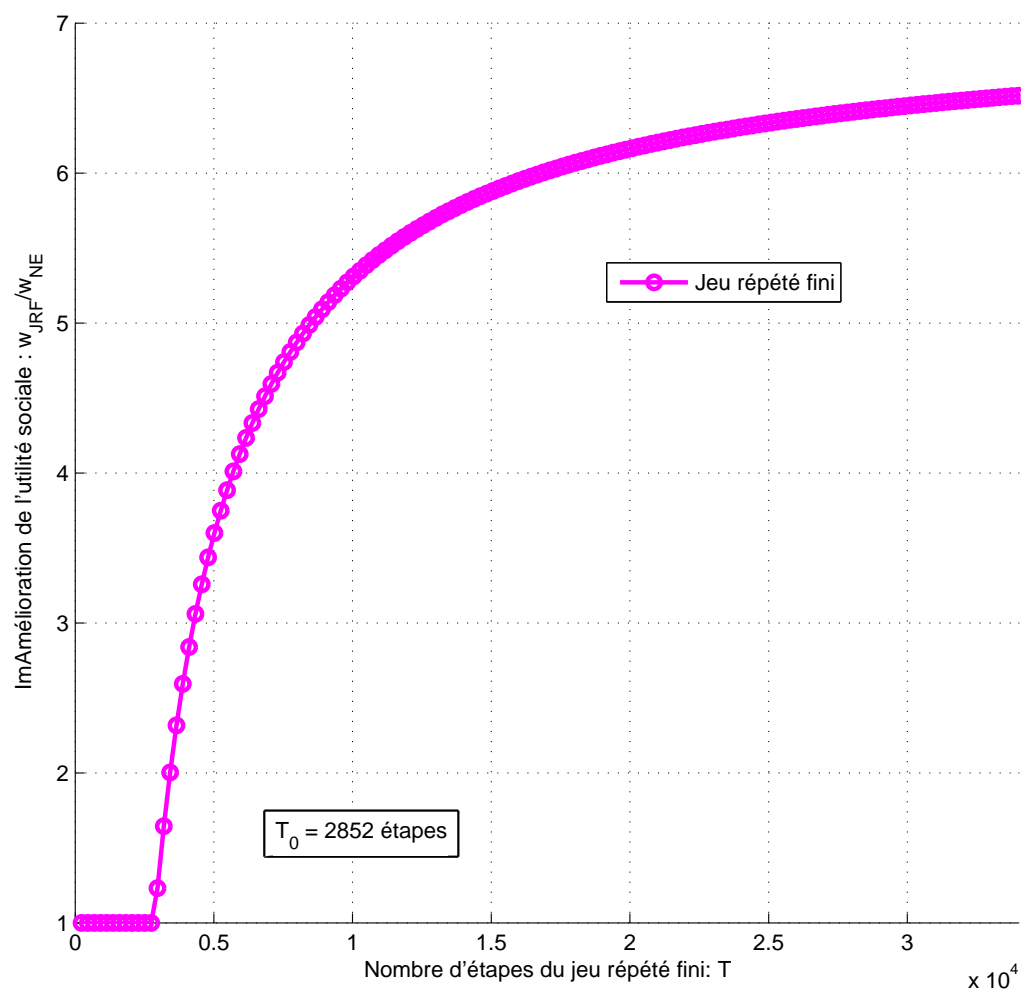


FIGURE 3.6 – Amélioration de l'utilité sociale pour le jeu répété fini (w_{FRG}) par rapport à l'équilibre de Nash (w_{NE}) en fonction du nombre d'étapes T du jeu.

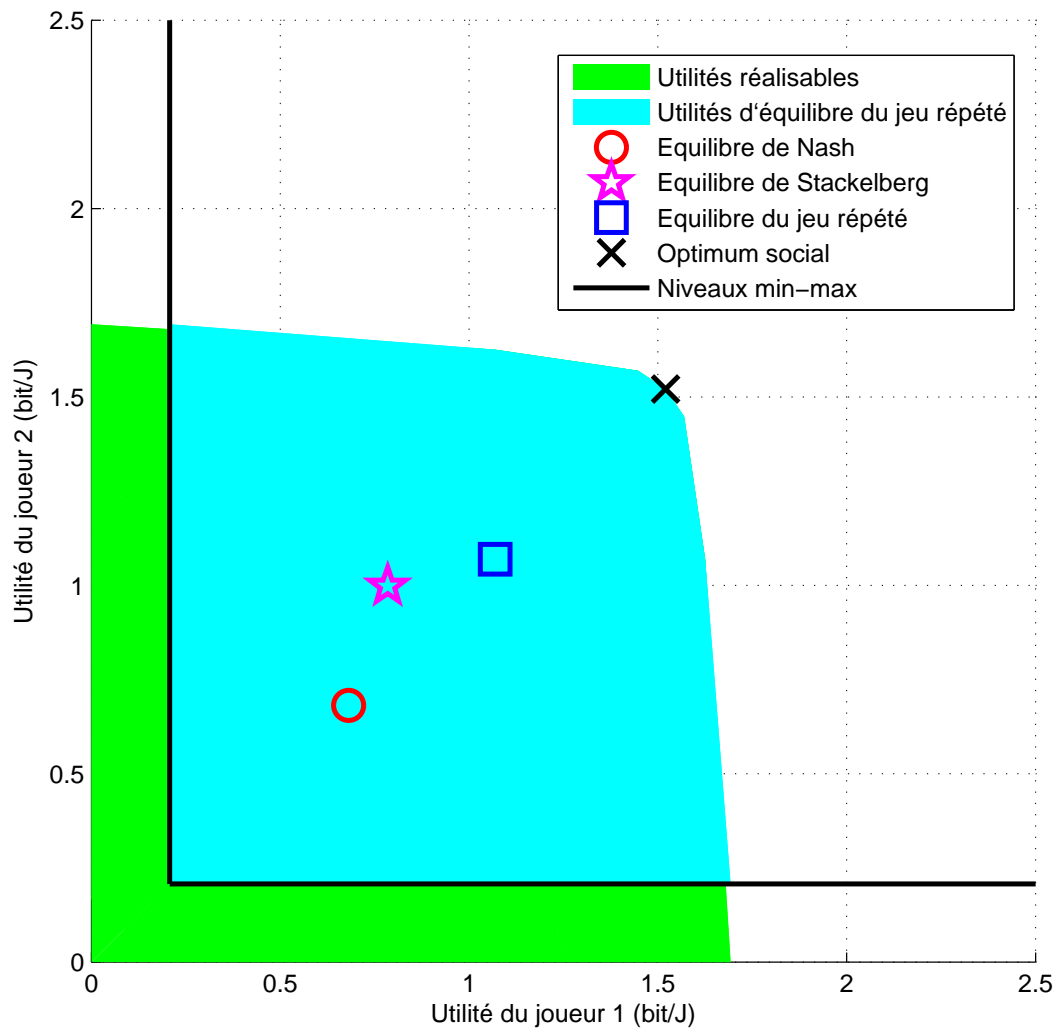


FIGURE 3.7 – Région des utilités espérées atteignables pour $(K, M, N) = (2, 2, 2)$ avec un processus stochastique sur les gains des canaux.

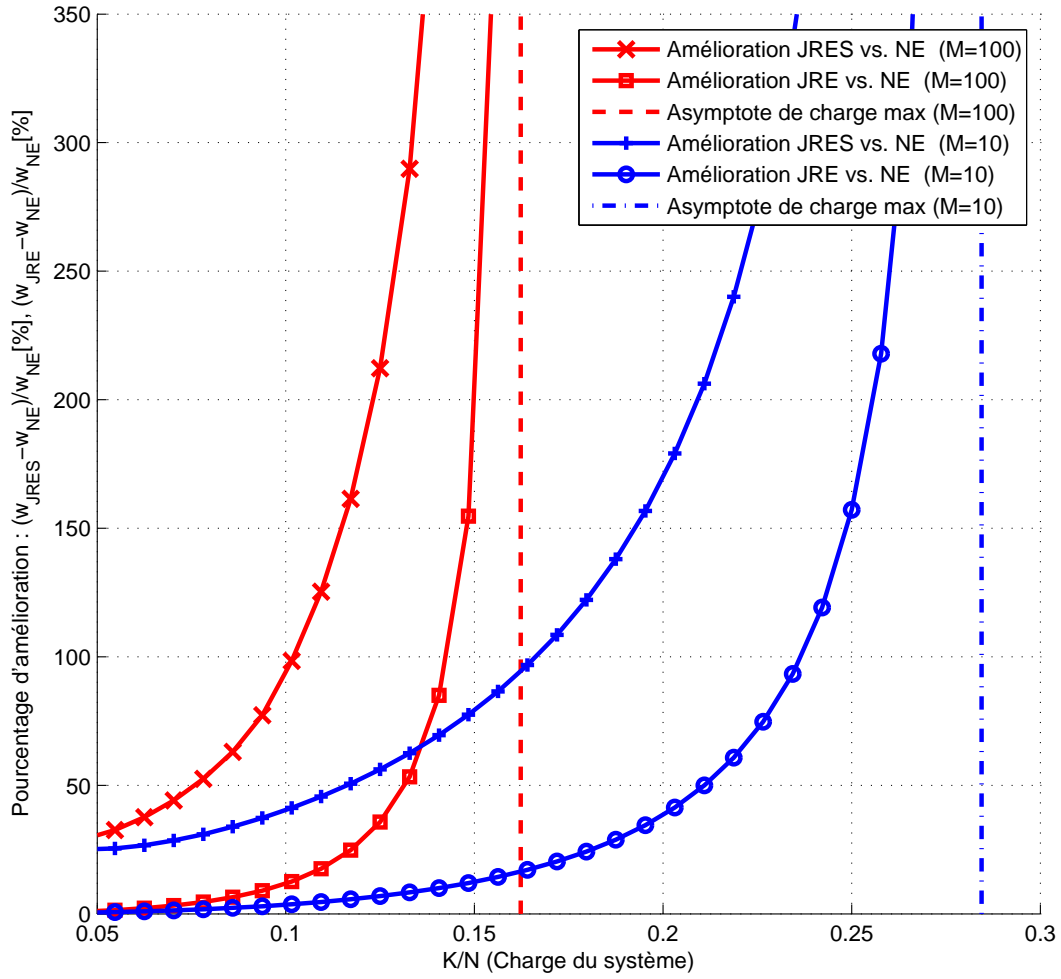


FIGURE 3.8 – Pourcentage d'amélioration de l'utilité sociale pour l'équilibre du jeu répété avec des gains stochastiques (w_{JRES}) et pour l'utilité de coopération (w_{JRE}) par rapport à l'équilibre de Nash (w_{NE}) en fonction de la charge (K/N) du système.

3.8 Démonstrations

3.8.1 Démonstration de la proposition 3.9

Condition (i). Dans la section 3.4. Nous avons :

$$\frac{\tilde{u}_k}{u_k^L} = \frac{\frac{f(\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}[1-(K-1)\tilde{\gamma}](1+\beta^*)}{\frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*}[1-(K-1)\gamma^*\beta^*-(K-2)\beta^*]} \quad (3.54)$$

$$\geq \frac{\frac{f(\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}[\beta^*-(K-1)\gamma^*\beta^*+1-(K-1)\gamma^*]}{\frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*}(\beta^*-(K-1)\gamma^*\beta^*+1-(K-1)\beta^*)}. \quad (3.55)$$

Par définition $\beta^* \geq \gamma^*$, donc, nous avons $\frac{\tilde{u}_k}{u_k^L} \geq 1$.

Condition (ii). Dans la section 3.4 nous avons :

$$\frac{\tilde{u}_k}{u_k^F} = \frac{\frac{f(\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}[1-(K-1)\tilde{\gamma}](1+\gamma^*)}{\frac{f(\beta^*)}{\beta^*}[1-(K-1)\gamma^*\beta^*-(K-2)\beta^*]} \quad (3.56)$$

$$\geq \frac{\frac{f(\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}\{1-\tilde{\gamma}[(K-1)\gamma^*+K-2]\}}{\frac{f(\beta^*)}{\beta^*}\{1-\beta^*[(K-1)\gamma^*+K-2]\}}. \quad (3.57)$$

Nous montrons que ce rapport est supérieur ou égal à 1. Considérons la quantité suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_{[\tilde{\gamma}_K, \beta^*]}(K) &= \frac{f(\tilde{\gamma}_K)}{\tilde{\gamma}_K}\{1-\tilde{\gamma}_K[(K-1)\gamma_K^*+K-2]\} - \frac{f(\beta^*)}{\beta^*}\{1-\beta^*[(K-1)\gamma_K^*+K-2]\} \\ &= K(f(\beta^*)-f(\tilde{\gamma}_K))(\gamma_K^*+1) + \frac{f(\tilde{\gamma}_K)}{\tilde{\gamma}_K} - \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} - (f(\beta^*)-f(\tilde{\gamma}_K))(\gamma_K^*+2) \\ &\geq K(f(\beta^*)-f(\tilde{\gamma}_K))(\tilde{\gamma}_K+1) + \frac{f(\tilde{\gamma}_K)}{\tilde{\gamma}_K} - \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} - (f(\beta^*)-f(\tilde{\gamma}_K))(\beta^*+2). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Lorsque $\tilde{\gamma}_K$ tend vers zéro quand K tend vers l'infini, ($\tilde{\gamma}_K \leq \frac{1}{K-1}$) et par hypothèse $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$:

$$\begin{aligned} &\lim_{K \rightarrow +\infty} \varphi_{[\tilde{\gamma}_K, \beta^*]}(K) \\ &\geq \lim_{K \rightarrow +\infty} K[(f(\beta^*)-f(\tilde{\gamma}_K))(\tilde{\gamma}_K+1)] + \frac{f(\tilde{\gamma}_K)}{\tilde{\gamma}_K} - \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} - (f(\beta^*)-f(\tilde{\gamma}_K))(\beta^*+2) \\ &\geq \lim_{K \rightarrow +\infty} K(f(\beta^*)) - \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} - (f(\beta^*))(\beta^*+2) = +\infty. \end{aligned} \quad (3.59)$$

En conclusion, la suite $(\varphi_{[\tilde{\gamma}_K, \beta^*]}(K))_{K \geq 2}$ est strictement croissante et sa limite est $+\infty$. Il existe un entier K_0 tel que pour tout $K \geq K_0$, $\varphi_{[\tilde{\gamma}_K, \beta^*]}(K) > 0$. Ceci implique que $u_k(\tilde{p}) > u_k^F$.

3.8.2 Démonstration de la proposition 3.10

Nous montrons que $\forall k \in \mathcal{K}, \frac{u_k(\bar{p})}{u_k(p^*)} = \frac{\frac{f(\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}[1-(K-1)\tilde{\gamma}]}{\frac{f(\beta^*)}{\beta^*}[1-(K-1)\beta^*]}$ est supérieur ou égal à 1.

Pour cela, nous considérons la fonction $\phi(x) = \frac{f(x)}{x} [1 - (K-1)x]$. La dérivée de ϕ est $\phi'(x) = \frac{x(1-(K-1)x)f'(x) - f(x)}{x^2}$ et s'annule en un unique point, $\tilde{\gamma}$. Donc la fonction ϕ est strictement croissante sur $]0, \tilde{\gamma}[$ et strictement décroissante sur $]\tilde{\gamma}, +\infty[$. Elle atteint donc son maximum en $\tilde{\gamma}$.

3.8.3 Démonstration des théorèmes 3.11 et 3.12

Les preuves sont fournies dans le cas général où le jeu du contrôle de puissance est répété pour différentes réalisations du canal. Lors d'une phase de jeu $t \geq 1$, un émetteur doit prendre en considération les réalisations des futurs gains des canaux, qui sont encore inconnus à l'étape $t \geq 1$. Nous utilisons un principe de programmation dynamique [68], standard pour l'étude des jeux répétés. Définissons l'utilité maximale que peut obtenir le joueur $k \in \mathcal{K}$ pour un gain du canal fixé.

$$\bar{u}_k = \max_p u_k(p) = \frac{R_k \eta_k f(\beta^*)}{\sigma^2 \beta^*}. \quad (3.60)$$

Considérons la condition d'équilibre à l'étape $t \geq 1$ pour le jeu répété fini.

Lors des T_0 dernières étapes, les joueurs jouent l'équilibre de Nash du jeu en un coup. Ainsi, aucune déviation unilatérale ne peut être profitable. Nous considérons maintenant que le joueur $k \in \mathcal{K}$ dévie lors des premières $T - T_0$ étapes. L'utilité de déviation est bornée supérieurement par \bar{u}_k et il sera puni à son niveau min-max (voir la définition 2.7 du chapitre 2) durant toutes les étapes suivantes. Supposons que le déviateur dévie à l'étape $t \leq T - T_0$. Notons v_k le niveau min-max défini par l'équation (3.39). L'utilité de déviation pour le jeu répété fini est bornée supérieurement par :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{T-T_0-1} (t-1) \tilde{u}_k(p(s)) + \bar{u}_k(p(t)) + \sum_{s=t+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[v_k(p(s))] \\ & \leq \sum_{s=1}^{T-T_0-1} \tilde{u}_k(p(s)) + \bar{u}_k(p(T-T_0)) + \sum_{s=T-T_0+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[v_k(p(s))]. \end{aligned}$$

La condition d'équilibre pour le jeu répété fini à l'étape $t \geq 1$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{t-1} \tilde{u}_k(p(s)) + \bar{u}_k(p(t)) + \sum_{s=t+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[v_k(p(s))] \\
& \leq \sum_{s=1}^{T-T_0-1} \tilde{u}_k(p(s)) + \tilde{u}_k(p(T-T_0)) + \sum_{s=T-T_0+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[u_k^*(p(s))] \\
& \sum_{s=1}^{T-T_0-1} \tilde{u}_k(p(s)) + \bar{u}_k(p(T-T_0)) + \sum_{s=T-T_0+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[v_k(p(s))] \\
& \leq \sum_{s=1}^{T-T_0-1} \tilde{u}_k(p(s)) + \tilde{u}_k(p(T-T_0)) + \sum_{s=T-T_0+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[u_k^*(p(s))] \\
& \iff \bar{u}_k(p(t)) + \sum_{s=T-T_0+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[v_k(p(s))] \leq \tilde{u}_k(p(t)) + \sum_{s=T-T_0+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[u_k^*(p(s))] \\
& \iff \eta_k \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} + \sum_{s=T-T_0+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}} \left[\frac{\eta_k f(\beta^*)}{\beta^* \left(\sum_{j \in \mathcal{K} \setminus k} p_j^{\max} \eta_j + \sigma^2 \right)} \right] \\
& \leq \eta_k \frac{f(\tilde{\gamma})(1 - (K-1)\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} + \sum_{s=T-T_0+1}^T \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[\eta_k] \frac{f(\beta^*)(1 - (K-1)\beta^*)}{\beta^*}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la dernière inégalité est satisfaite lorsque la condition (3.33) du théorème 3.11 est vérifiée.

$$\begin{aligned}
& \eta_k^{\max} \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} - \eta_k^{\min} \frac{f(\tilde{\gamma})(1 - (K-1)\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} \\
& \leq T_0 \left[\eta_k^{\min} \frac{f(\beta^*)(1 - (K-1)\beta^*)}{\beta^*} - \frac{\eta_k^{\max} f(\beta^*)}{\beta^* \left(\sum_{j \in \mathcal{K} \setminus k} p_j^{\max} \eta_k^{\min} + \sigma^2 \right)} \right] \\
& \implies \eta_k^{\max} \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} + T_0 \frac{\eta_k^{\max} f(\beta^*)}{\beta^* \left(\sum_{j \in \mathcal{K} \setminus k} p_j^{\max} \eta_k^{\min} + \sigma^2 \right)} \\
& \leq \eta_k^{\min} \frac{f(\tilde{\gamma})(1 - (K-1)\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} + T_0 \eta_k^{\min} \frac{f(\beta^*)(1 - (K-1)\beta^*)}{\beta^*} \\
& \implies \eta_k^{\max} \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} + \sum_{s=T-T_0+1}^T \frac{\eta_k^{\max} f(\beta^*)}{\beta^* \left(\sum_{j \in \mathcal{K} \setminus k} p_j^{\max} \eta_k^{\min} + \sigma^2 \right)} \\
& \leq \eta_k^{\min} \frac{f(\tilde{\gamma})(1 - (K-1)\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} + \sum_{s=T-T_0+1}^T \eta_k^{\min} \frac{f(\beta^*)(1 - (K-1)\beta^*)}{\beta^*}.
\end{aligned}$$

Si la condition (3.33) du théorème 3.11 est satisfaite pour les pires gains des canaux η_{\min}, η_{\max} , alors elle est vraie pour toute distribution de probabilités sur les gains des canaux. La condition du théorème 3.11 est suffisante pour garantir la condition d'équilibre à chaque étape $1 \leq t \leq T$ du jeu répété fini. Ceci conclut la preuve du théorème 3.11 pour le jeu répété fini.

Considérons la condition d'équilibre à l'étape $t \geq 1$ pour le jeu répété escompté.

$$\begin{aligned}
& \lambda \bar{u}_k(p(t)) + \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[u_k^*(p(s))] \leq \lambda \tilde{u}_k(p(t)) + \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[\tilde{u}_k(p(s))] \\
\iff & \lambda \eta_k \frac{f(\beta^*)}{\beta^*} + \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[\eta_k] \frac{f(\beta^*)(1-(K-1)\beta^*)}{\beta^*} \\
& \leq \lambda \eta_k \frac{f(\tilde{\gamma})(1-(K-1)\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} + \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[\eta_k] \frac{f(\tilde{\gamma})(1-(K-1)\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} \\
\iff & \lambda \eta_k \left[\frac{f(\beta^*)}{\beta^*} - \frac{f(\tilde{\gamma})(1-(K-1)\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} \right] \\
& \leq \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \mathbb{E}_{\mathbf{g}}[\eta_k] \times \left[\frac{f(\tilde{\gamma})(1-(K-1)\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} - \frac{f(\beta^*)(1-(K-1)\beta^*)}{\beta^*} \right].
\end{aligned}$$

La condition d'équilibre pour le jeu répété escompté est obtenue en utilisant le même argument que pour le jeu répété fini.

3.8.4 Démonstration du théorème 3.14

Il suffit de montrer que le signal public ω satisfait les conditions de "rang individuel plein" et de "rang par paire plein" du théorème 2.25 et de [29].

Montrons tout d'abord que l'intérieur de l'ensemble des utilités réalisables et individuellement rationnelles \mathcal{U}_G^* est non vide.

Prenons la famille $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ de K vecteurs d'utilité $K : \bar{u}_k = \{0, \dots, u_k^{max}, \dots, 0\}$. Ceci forme la base d'un espace vectoriel de dimension K et contenu dans \mathbb{R}^K . Ainsi l'enveloppe convexe de ces vecteurs d'utilité est de dimension K et est incluse dans l'ensemble des utilités réalisables du jeu répété. Ce qui implique que \mathcal{U}_G^* est de dimension K .

Montrons ensuite que toutes les actions jointes $p = (p_1, \dots, p_K)$ satisfont la condition de "rang individuel plein" (voir la définition (2.24)).

Rappelons que le signal ω est défini par l'équation suivante :

$$\omega = \sigma^2 + \sum_{k=1}^K \eta_k p_k. \tag{3.61}$$

Fixons $p_{-k} \in \mathcal{A}_{-k}$ et un joueur $k \in \mathcal{K}$. Nous montrons que la condition de "rang individuel plein" est satisfaite. Définissons la matrice $\Pi_k(p_{-k})$ de taille $|\mathcal{A}_k| \times |\Omega|$ dont les lignes sont indexées par les actions $p_k \in \mathcal{A}_k$ et dont les colonnes sont indexées par les signaux $\omega \in \Omega$.

$$\Pi_k(p_{-k}) = \left(T(s|p_k, p_{-k}) \right)_{\substack{p_k \in \mathcal{A}_k \\ s \in \mathcal{S}}} . \quad (3.62)$$

Le signal public que l'on considère est déterministe. La matrice $\Pi_k(p_{-k})$ sera composée de 0 et de 1. Ensuite chaque paire de puissances p_k et p'_k engendre une paire de signaux $\omega \neq \omega'$ différents :

$$\omega = \sigma^2 + \sum_{j \neq k} \eta_j p_j + p_k, \quad (3.63)$$

$$\omega' = \sigma^2 + \sum_{j \neq k} \eta_j p_j + p'_k. \quad (3.64)$$

La matrice $\Pi_k(p_{-k})$ possède une diagonale de "un" de longueur $|\mathcal{A}_k|$. Toutes stratégies pures $a \in A$ vérifient la propriété de "rang individuel plein" pour le signal public défini par (3.14).

Montrons, pour finir, que pour tous couples de joueurs $k, j \in \mathcal{K}$, il existe une stratégie mixte qui satisfait la propriété de "rang par paire plein" (voir la définition (2.24)).

Définissons la matrice $\Pi_{kj}(p)$ de taille $(|\mathcal{A}_k| + |\mathcal{A}_j|) \times |\mathcal{S}|$ dont les lignes sont indexées par les actions $a_k \in \mathcal{A}_k$ et $a_j \in \mathcal{A}_j$ et les colonnes sont indexées par les signaux $s \in \mathcal{S}$.

$$\Pi_{kj}(p) = \left(\begin{array}{c} \Pi_k(p_{-k}) \\ \Pi_j(p_{-j}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} T(s|p_k, p_{-k}) \\ T(s|p_j, p_{-j}) \end{array} \right)_{\substack{(p_k, p_j) \in \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_j \\ s \in \mathcal{S}}} . \quad (3.65)$$

La stratégie mixte $p \in \prod_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k)$ vérifie la propriété de "rang par paire plein" le rang de $\Pi_{kj}(p)$ est égal à $|\mathcal{A}_k| + |\mathcal{A}_j| - 1$. Prenons deux joueurs $k, j \in \mathcal{K}$, supposons que $P_k^{\max} \geq P_j^{\max}$ et posons $p_k = P_k^{\max}$, $p_j = 0$ et $p_{-kj} = 0$. Le signal ω est déterministe, donc la matrice $\Pi_{kj}(p)$ est composée de "zéro" et de "un". La matrice $\Pi_k(p_{-k})$ est déterminée par les différentes valeurs du signal :

$$\omega = \sigma^2 + p_k, \quad p_k \in \{0, \dots, P_k^{\max}\}. \quad (3.66)$$

La matrice $\Pi_j(p_{-j})$ est déterminée par les différentes valeurs du signal :

$$\omega = \sigma^2 + P_k^{\max} + p_j, \quad p_j \in \{0, \dots, P_j^{\max}\}. \quad (3.67)$$

Le signal ω prend $|\mathcal{A}_k| + |\mathcal{A}_j| - 1$ différentes valeurs. Donc, la matrice $\Pi_{kj}(p)$ possède une diagonale de 1 de longueur $|\mathcal{A}_k| + |\mathcal{A}_j| - 1$. Le rang de la matrice $\Pi_{kj}(p)$ est de $|\mathcal{A}_k| + |\mathcal{A}_j| - 1$.

Le théorème 2.25 nous garantit que l'ensemble des utilités d'équilibre converge lorsque λ tend vers 0.

$$NE^\lambda \longrightarrow \mathcal{U}_G^*, \text{ lorsque } \lambda \longrightarrow 0. \quad (3.68)$$

3.8.5 Démonstration du théorème 3.18

Nous démontrons le théorème ci-dessus en utilisant une combinaison des résultats énoncés dans les articles de [41, 30, 29, 42]. Dans le théorème 3.14 précédent, nous avons montré que l'intérieur de \mathcal{U}_G^* est non-vidé et que le signal public satisfait les conditions de "rang individuel plein" et de "rang par paire plein" pour chaque tirage du canal. Dans notre cas, le tirage du canal ne dépend pas des actions choisies par les joueurs. Ceci implique que les conditions "IFR" et "PRF" de [30] et les conditions "F1" et "F2" de [41] sont satisfaites. Ensuite, rappelons que la probabilité de transition sur les états des canaux est irréductible. D'après le théorème 2 dans [41] et le théorème 2 dans [30], l'ensemble des utilités d'équilibre converge vers \mathcal{U}_G^* lorsque λ tend vers 0 : $\lim_{\lambda \rightarrow 0} NE^\lambda(\eta(1)) = \mathcal{U}_G^*$ pour tout état initial $\eta(1) \in \Theta$.

3.9 Conclusion et perspectives

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un jeu de contrôle de puissance pour les réseaux de communication décentralisés. Les joueurs sont des émetteurs qui choisissent une puissance d'émission et transmettent simultanément sur la même bande de fréquences. La puissance d'un émetteur altère la communication des autres émetteurs, l'interaction est mutuelle. La théorie des jeux est appropriée pour l'étude du contrôle de puissance décentralisé. Les solutions proposées par cette théorie changent totalement suivant les hypothèses de connaissance des joueurs. Les joueurs sont supposés connaître les données du jeu, c'est-à-dire l'ensemble des joueurs, les espaces d'actions et les fonctions d'utilité. Les joueurs sont rationnels car ils choisissent la stratégie qui maximisent leur utilité sachant que les autres joueurs maximisent, etc. Ces hypothèses d'information sont le socle sur lequel repose le concept d'équilibre. Lorsque les joueurs ne possèdent aucune information additionnelle, la solution pertinente est l'équilibre de Nash, dont l'étude est présentée à la section 3.3. Lorsqu'un groupe de joueurs observe, avant de jouer, les actions choisies par l'autre groupe de joueurs, la solution pertinente est l'équilibre de Stackelberg, dont l'étude est présentée à la section 3.4. La solution de l'équilibre du jeu répété, présenté aux sections 3.5 et 3.6, correspond à la situation où les joueurs jouent simultanément d'étape en étape et observent les actions passées à travers

un signal. À chaque hypothèse d'information, correspond un concept d'équilibre approprié. Les résultats numériques, présentés à la section 3.7, nous permettent d'évaluer les utilités d'équilibre pour le contrôle de puissance qui correspondent aux différentes hypothèses d'information. Ces résultats nous indiquent que pour qu'un système décentralisé

POUR QU'UN SYSTÈME DÉCENTRALISÉ FONCTIONNE DE MANIÈRE OPTIMALE,
L'ÉCHANGE D'INFORMATION ENTRE LES UTILISATEURS EST INDISPENSABLE.

fonctionne correctement, les appareils auraient finalement intérêt à s'échanger de l'information stratégique. Lorsque dans le système étudié, les joueurs observent les actions passées de manière imparfaite, l'ensemble des utilités d'équilibre n'est pas connu. Nous proposons d'approfondir ce problème lié à l'observation imparfaite des actions passées en considérant deux axes de travail.

- Nous proposons, au chapitre 4, de reconstruire une structure d'observation connue, en ajoutant au système une structure de signaux supplémentaires à la structure de signaux additionnelle. Cette dernière permet de reconstruire une structure d'observation afin de garantir un résultat d'équilibre.
- Nous proposons, au chapitre 5, d'étudier la caractérisation de l'ensemble des équilibres du jeu répété avec observation imparfaite. En effet, pour obtenir cette caractérisation, nous devons résoudre le problème des niveaux de punition (niveaux min-max) dans un jeu répété avec observation imparfaite. À l'aide des outils de la théorie de Shannon, nous proposons un ensemble de suites d'actions corrélées qu'un groupe de joueurs peut mettre en œuvre à travers un canal d'observation 7.

Chapitre 4

Reconstruction d'une structure d'observation

4.1 Description et résultats principaux

Le théorème Folk, présenté au chapitre 2, caractérise les utilités d'équilibre pour un jeu répété de long terme lorsque les joueurs observent parfaitement les actions passées $a_k \in \mathcal{A}_k$. Ce type d'hypothèse, concernant la structure d'observation, n'est pas toujours réaliste. Dans le jeu du contrôle de puissance étudié au chapitre 3, les joueurs

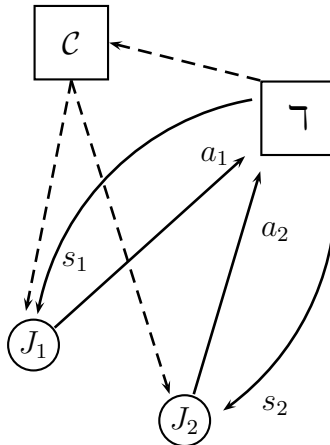


FIGURE 4.1 – Structure d'observation \mathcal{T} assistée d'un encodeur \mathcal{C} .

n'observent pas les actions passées mais observent un signal appelé RSIB, défini par l'équation (3.2). Nous avons montré que cette structure d'observation est suffisamment précise pour garantir un théorème Folk. En revanche, lorsque la structure d'observation des joueurs $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \Delta(\mathcal{S})$, est arbitraire, la région des utilités d'équilibre n'est pas

caractérisée. Dans ce modèle, chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ observe un signal $s_k \in \mathcal{S}_k$ tiré avec une distribution de probabilités $\mathbb{T}(s_k, s_{-k}|a) \in \Delta(\mathcal{S})$ qui dépend des actions $a \in \mathcal{A}$ choisies. Dans ce chapitre, nous introduisons une structure de signaux supplémentaires de manière à rendre la structure d'observation plus précise pour les joueurs. Un encodeur \mathcal{C} (voir figure 4.1) envoie aux joueurs un signal qui complète les signaux privés $s_k \in \mathcal{S}_k$ reçus par le joueur $k \in \mathcal{K}$ à chaque étape. Afin de satisfaire les contraintes de transmission d'information, le signal supplémentaire envoyé par l'encodeur doit utiliser le moins de symboles possibles. Le signal de l'encodeur et les signaux privés doivent permettre aux joueurs d'observer plus précisément les actions choisies aux étapes précédentes. Le but de la reconstruction d'une structure d'observation est de caractériser la région des utilités d'équilibre d'un jeu répété avec observation imparfaite. Si une utilité u n'appartient pas à cette région, alors aucune stratégie dont l'utilité de long terme est u ne peut être une stratégie d'équilibre.

Le problème général est celui de la transformation d'une première structure d'observation en une seconde qui soit plus précise. Trois situations ont été envisagées. La première, étudiée dans la section 4.2, considère que l'encodeur observe les actions choisies de manière imparfaite. Ce dernier envoie, à chaque étape, un signal supplémentaire aux joueurs afin qu'ils distinguent parfaitement les actions choisies à l'étape précédente. Nous appelons "reconstruction de l'observation parfaite", l'envoi d'un signal qui permet aux joueurs d'observer parfaitement les actions passées. Le signal qui utilise un nombre de symboles minimal est caractérisé grâce au coloriage du graphe. Cette théorie du coloriage de graphe est utilisée en théorie de l'information depuis les travaux de Shannon sur la capacité sans erreur [67]. Nous caractérisons l'existence d'un tel signal supplémentaire ainsi que sa cardinalité minimale. Dans la seconde situation, présentée dans la section 4.3, l'encodeur observe encore les actions choisies de manière imparfaite. Ce dernier envoie un signal supplémentaire aux joueurs afin qu'ils distinguent correctement le vecteur d'actions choisi avec une probabilité d'erreur inférieure au paramètre $\varepsilon > 0$. Dans ce cas, l'envoi du signal supplémentaire est appelé "la reconstruction de l'observation ε -parfaite". La précision de l'observation est étudiée à l'aide des coloriages de graphes. Nous énonçons des conditions suffisantes pour garantir l'existence d'un tel signal et pour réduire sa cardinalité. Les résultats de ces deux premières sections sont regroupés au sein de la seconde contribution comprenant les théorèmes 4.8, 4.10, 4.15, 4.16, 4.26 et 4.27. Ces résultats nous permettent de garantir l'existence et l'optimalité d'un signal supplémentaire qui autorise un ou plusieurs joueurs à reconstruire l'observation parfaite ou ε -parfaite. La troisième section 4.4 est consacrée à la reconstruction asymptotique des suites d'actions. L'encodeur observe parfaitement les suites d'actions jouées et utilise les techniques de codage de source inspirées par Shannon [65] pour les représenter en utilisant un nombre de symboles minimal. Les joueurs sont censés choisir leurs actions de manière indépendante et identiquement distribuée d'étape en étape. Cependant, il peut arriver qu'un joueur dévie de la distribution fixée et tire ses actions avec des distributions de probabilité différentes. Le codage de source de Shannon [65] est conçu pour les sources d'information indépendantes et identiquement distribuées

d'étape en étape et n'est pas adapté à ce type de source. Un joueur malintentionné serait donc capable de rompre le schéma de codage classique en utilisant, sur ses actions, une distribution de probabilités qui génère des erreurs. Nous proposons un schéma de codage, conçu pour être fiable même lorsqu'un joueur choisit ses suites d'actions de manière arbitraire. La loi des grands nombres et le codage de source aux variations arbitraires [14] nous permettent de caractériser l'ensemble minimal des signaux supplémentaires envoyés par l'encodeur. Notre troisième contribution est constituée des théorèmes 4.31 et 4.37 qui fournissent les débits minimaux de notre source d'action pour deux configurations : lorsque le décodeur (un joueur J arbitraire) observe ou n'observe pas un signal privé $s \in \mathcal{S}$ à travers un canal \mathbb{T} . La conclusion et les nouveaux problèmes qui découlent de ces résultats sont présentés dans la section 4.5.

4.2 Reconstruction de l'observation parfaite

Les jeux répétés avec observation imparfaite des actions passées ont été présentés au cours du chapitre 2. Cette section est consacrée à l'étude de la reconstruction pour les joueurs d'une structure d'observation parfaite des actions passées. Nous proposons d'ajouter une structure d'observation parallèle appelée "encodeur" et notée \mathcal{C} . Cet encodeur \mathcal{C} est introduit afin d'aider les joueurs à retrouver l'action $a \in \mathcal{A}$ jouée à l'étape précédente. Ce dernier introduit un signal supplémentaire qui permet aux joueurs de retrouver sans ambiguïté l'action jouée à l'étape précédente. Évidemment, si l'encodeur envoie directement l'action jointe $a \in \mathcal{A}$, alors l'observation parfaite est reconstruite immédiatement. Cependant, ces signaux supplémentaires sont soumis à des contraintes de capacité pour être transmis aux joueurs. Ils doivent donc être optimisés afin d'utiliser le moins de symboles possibles.

Nous définissons, dans la section 4.2.1, l'observation parfaite pour les structures d'observation d'un joueur J et la reconstruction de l'observation parfaite. Ensuite, nous formulons, à la section 4.2.2, une condition nécessaire et suffisante sur l'observation de l'encodeur \mathbb{T}_0 pour que ce dernier puisse reconstruire l'observation parfaite. Puis, nous caractérisons, à la section 4.2.3, le signal minimal en termes de cardinalité $|\mathcal{R}|$, que l'encodeur doit envoyer au joueur J afin de reconstruire l'observation parfaite. La reconstruction pour plusieurs joueurs \mathcal{K} est étudiée à la section 4.2.4. La quantité de signaux supplémentaires $\log_2 |\mathcal{R}|$, est comparée à la quantité d'information $\log_2 |\mathcal{A}|$ à reconstruire. Ce rapport est appelé "prix de la reconstruction de l'observation parfaite" et est défini section 4.2.5. À la section 4.2.6, nous illustrons nos résultats par un exemple inspiré du jeu de contrôle de puissance étudié au chapitre 3.

4.2.1 Modèle d'observation assistée d'un encodeur

Le problème étudié dans cette section est résumé par la figure 4.2. Le joueur J observe l'action $a \in \mathcal{A}$ à travers un canal d'observation T dont la sortie est notée $s \in \mathcal{S}$. L'encodeur \mathcal{C} observe l'action $a \in \mathcal{A}$ à travers un canal d'observation T_0 dont la sortie est notée $s_0 \in \mathcal{S}_0$. Ce dernier envoie au joueur J un signal supplémentaire $r \in \mathcal{R}$ de sorte que le couple des signaux (s, r) permette au joueur J d'observer parfaitement l'action $a \in \mathcal{A}$.

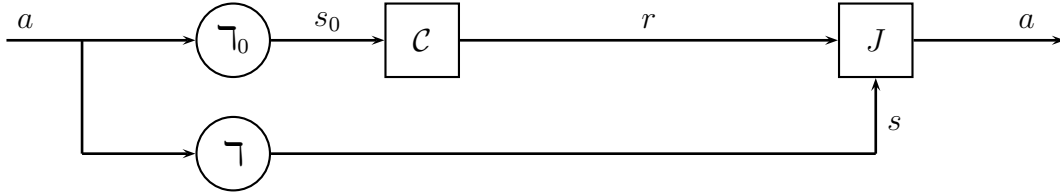


FIGURE 4.2 – L'encodeur \mathcal{C} observe une version dégradée s_0 de l'action $a \in \mathcal{A}$ à travers T_0 et renvoie un message $r \in \mathcal{R}$ au joueur J . Ce dernier reconstruit $a \in \mathcal{A}$ à partir des signaux $r \in \mathcal{R}$ et $s \in \mathcal{S}$.

Définition 4.1 Une structure d'observation $\mathsf{T} : \mathcal{A} \rightarrow \Delta(\mathcal{S})$ est parfaite s'il existe une partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ de l'ensemble des signaux $\theta(a) \subset \mathcal{S}$, indexée par $a \in \mathcal{A}$ telle que :

$$\sum_{s \in \theta(a)} \mathsf{T}(s|a) = 1, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.1)$$

À l'inverse, une structure d'observation n'est pas parfaite si pour toute partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ indexée par $a \in \mathcal{A}$, il existe une action $a \in \mathcal{A}$ telle que $\sum_{s \in \theta(a)} \mathsf{T}(s|a) < 1$. Dans de nombreux modèles, l'observation n'est pas parfaite et la caractérisation des utilités d'équilibres reste à formuler.

Problème 4.2 Étant données deux structures d'observation T et T_0 définies comme suit,

$$\mathsf{T} : \mathcal{A} \rightarrow \Delta(\mathcal{S}), \quad (4.2)$$

$$\mathsf{T}_0 : \mathcal{A} \rightarrow \Delta(\mathcal{S}_0), \quad (4.3)$$

intuitivement, deux questions se posent :

- L'encodeur \mathcal{C} possède-t-il suffisamment d'informations pour permettre au joueur J de reconstruire l'observation parfaite ?
- Quelle est la cardinalité minimale $|\mathcal{R}|$ de l'ensemble des signaux que l'encodeur envoie au joueur afin que celui-ci observe parfaitement $a \in \mathcal{A}$?

Afin de répondre à ces questions, nous définissons le concept de reconstruction de l'observation parfaite.

Définition 4.3 Soit T la structure d'observation du joueur et T_0 celle de l'encodeur. L'encodeur est capable de reconstruire l'observation parfaite s'il existe un ensemble de signaux \mathcal{R} , une fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ et une partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ de l'ensemble des paires de signaux $\theta(a) \subset \mathcal{S} \times \mathcal{R}$, indexée par $a \in \mathcal{A}$ tel que :

$$\sum_{(s,r) \in \theta(a)} \mathsf{T}(s|a) \cdot \sum_{\substack{s_0 \in \mathcal{S}_0, \\ \phi(s_0)=r}} \mathsf{T}_0(s_0|a) = 1, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.4)$$

Dans la section 4.2.2, nous caractérisons les couples de structures d'observation T et T_0 pour lesquels l'encodeur est capable de reconstruire l'observation parfaite des actions $a \in \mathcal{A}$. Dans ce cas, nous caractérisons, dans la section 4.2.3, la fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ optimale dont la cardinalité de $|\mathcal{R}|$ est minimale.

4.2.2 Existence de la reconstruction optimale

Le problème de la reconstruction de l'observation parfaite nécessite l'emploi d'outils mathématiques issus de la théorie de graphe et notamment le coloriage de graphe.

Définition 4.4 Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, E)$ un graphe avec \mathcal{A} un ensemble de sommets et E un ensemble d'arcs. L'arc $e = (a, b) \in E$ relie le sommet $a \in \mathcal{A}$ au sommet $b \in \mathcal{A}$.

- Soit Φ un ensemble de couleurs. Une fonction $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \Phi$ est un coloriage du graphe \mathcal{G} si deux sommets a et b reliés par un arc $e = (a, b) \in E$ possèdent des couleurs différentes $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.
- Le coloriage minimal $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \rightarrow \Phi$ est un coloriage du graphe \mathcal{G} pour lequel la cardinalité de l'ensemble des couleurs $|\Phi|$ est minimal.
- Le nombre chromatique χ du graphe \mathcal{G} est la cardinalité $|\Phi|$ de l'ensemble des couleurs du coloriage minimal $\tilde{\varphi}$.

Le coloriage de graphe est une notion présente en théorie de l'information depuis les travaux de Shannon sur la capacité avec zéro erreur [67][48] et leurs liens avec les graphes parfaits [12]. Nous caractérisons les couples de structures d'observation T et T_0 qui autorisent l'encodeur à reconstruire l'observation parfaite grâce au concept de coloriage d'un graphe.

Définition 4.5 Pour une action $a \in \mathcal{A}$, nous définissons l'ensemble des signaux $\mathcal{S}(a)$ que peut recevoir le joueur J avec une probabilité non-nulle et l'ensemble des signaux $\mathcal{S}_0(a)$

que peut recevoir l'encodeur \mathcal{C} avec une probabilité non-nulle.

$$\mathcal{S}(a) = \left\{ s \in \mathcal{S} \mid \mathbb{T}(s|a) > 0 \right\}, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{S}_0(a) = \left\{ s_0 \in \mathcal{S}_0 \mid \mathbb{T}_0(s_0|a) > 0 \right\}. \quad (4.6)$$

Nous définissons un graphe dans lequel les sommets sont les actions $a \in \mathcal{A}$. Les arcs $e = (a, b)$ relient deux sommets si les actions correspondantes, $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$, engendrent un même signal $s \in \mathcal{S}$ avec une probabilité positive.

Définition 4.6 Le graphe auxiliaire, noté $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, E)$ est défini comme suit :

$$e = (a, b) \in E \iff \mathcal{S}(a) \cap \mathcal{S}(b) \neq \emptyset. \quad (4.7)$$

L'observation de l'encodeur \mathbb{T}_0 est censée compléter l'observation du joueur \mathbb{T} . Si deux actions, $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$, sont voisines dans le graphe \mathcal{G} , alors les ensembles de signaux reçus par l'encodeur doivent être disjoints $\mathcal{S}_0(a) \cap \mathcal{S}_0(b) = \emptyset$. Le concept qui capture cette notion est celui d'un coloriage de graphe pour lequel les actions sont des sommets et les signaux reçus par l'encodeur sont des couleurs. Contrairement au coloriage de graphe classique, chaque sommet est affecté d'un ensemble de couleurs. Le coloriage qui nous intéresse associe à chaque paire de sommets voisins des ensembles de couleurs disjoints. Nous avons choisi de nommer ce coloriage particulier une "peinture", comme un clin d'œil à C. Berge. Une peinture associe à chaque sommet $a \in \mathcal{A}$ un ensemble de couleurs $\mathcal{S}_0(a)$. Pour chaque sommet $b \in \mathcal{A}$ voisin de $a \in \mathcal{A}$, les ensembles de couleurs sont disjoints $\mathcal{S}_0(a) \cap \mathcal{S}_0(b) = \emptyset$.

Définition 4.7 L'observation de l'encodeur \mathbb{T}_0 est une peinture du graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, E)$ si la propriété suivante est vérifiée.

$$e = (a, b) \in E \iff \mathcal{S}_0(a) \cap \mathcal{S}_0(b) = \emptyset. \quad (4.8)$$

En d'autres termes, une correspondance (i.e. qui à un point fait correspondre un ensemble) $\widetilde{\mathbb{T}}_0 : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{S}_0$ est une peinture d'un graphe \mathcal{G} si toute fonction $\mathbb{T}_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}_0$ selection de $\widetilde{\mathbb{T}}_0$ est un coloriage du graphe \mathcal{G} . Cette dernière définition nous permet d'énoncer le théorème d'existence qui suit.

Théorème 4.8 (Seconde contribution) *L'encodeur est capable de reconstruire l'observation parfaite si et seulement si l'observation \mathbb{T}_0 est une peinture du graphe \mathcal{G} du joueur.*

Le théorème 4.8 est publié dans [79] et sa démonstration est présentée à la section 4.8. Elle se déroule en deux temps. Tout d'abord, si \mathbb{T}_0 est une peinture du graphe \mathcal{G} , alors

nous fournissons une fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ et une partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ de l'ensemble des signaux $\theta(a) \subset \mathcal{S} \times \mathcal{R}$, indexée par $a \in \mathcal{A}$ qui satisfait l'équation (4.50). Ensuite, nous montrons que si cette condition n'est pas vérifiée, alors pour toute partition, il existe une action qui ne satisfait pas l'équation (4.50).

4.2.3 Caractérisation de la reconstruction optimale

Dans la section précédente, nous présentons une condition nécessaire et suffisante pour que la reconstruction de l'observation parfaite soit possible. Lorsque cette condition est satisfaite, nous cherchons à caractériser la fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ dont la cardinalité $|\mathcal{R}|$ est minimale. Ainsi, les signaux envoyés au joueur J seront optimaux en termes de complexité et pourront ainsi être transmis sur des canaux de capacité inférieure. Le problème de minimisation de $|\mathcal{R}|$ peut être vu comme un problème de codage de source en un coup. Le modèle asymptotique qui se rapproche du nôtre est celui du codage de source avec information adjacente de Slepian et Wolf [69] présenté à la section A.6. Le codage en un coup est fiable si et seulement si la probabilité d'erreur est égale à zéro. Les possibilités de compressions sont donc plus restreintes que dans le modèle asymptotique de Slepian et Wolf qui tolère une probabilité d'erreur $\varepsilon > 0$ arbitrairement faible. Nous caractérisons la fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ optimale qui permet au joueur d'observer parfaitement l'action passée avec un signal supplémentaire de cardinalité $|\mathcal{R}| = R$ minimale. Pour ce faire, nous introduisons un graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$ de manière à éliminer l'information redondante entre les signaux $s_0 \in \mathcal{S}_0$ de l'encodeur \mathcal{C} et ceux $s \in \mathcal{S}$ du joueur J . Nous appelons "information essentielle", les symboles $r \in \mathcal{R}$ correspondant à la réduction du signal $s_0 \in \mathcal{S}_0$ par la fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ optimale.

Définition 4.9 Le graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}} = (\mathcal{S}_0, \tilde{E})$ est défini par rapport aux arêtes du graphe auxiliaire $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, E)$. Il existe une arête entre deux sommets $s_0 \in \mathcal{S}_0$ et $s'_0 \in \mathcal{S}_0$ si et seulement si ces signaux font parti des ensembles de couleurs $\mathcal{S}_0(a)$ et $\mathcal{S}_0(b)$ correspondant à deux sommets $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$ voisins dans le graphe \mathcal{G} .

$$e = (s_0, s'_0) \in \tilde{E} \iff \exists (a, b) \in \mathcal{A}^2, \text{ tel que } \begin{cases} e = (a, b) \in E, \\ s_0 \in \mathcal{S}_0(a), \\ s'_0 \in \mathcal{S}_0(b). \end{cases} \quad (4.9)$$

Notons $\tilde{\phi} : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}}$ le coloriage minimal du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\chi = |\tilde{\mathcal{R}}|$ le nombre chromatique du graphe $\tilde{\mathcal{G}}$.

Le graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$ possède plusieurs propriétés qui nous intéressent. Premièrement, l'encodeur est capable de reconstruire l'observation parfaite à l'aide de tous les coloriages $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ du graphe bi-auxiliaire. Ensuite, le coloriage minimal $\tilde{\phi} : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}}$ permet à l'encodeur de supprimer les informations redondantes entre

les signaux $s \in \mathcal{S}$ et $s_0 \in \mathcal{S}_0$. Ainsi, nous montrons que la reconstruction de l'observation parfaite est optimale si l'on utilise le coloriage du graphe bi-auxiliaire.

Théorème 4.10 (Seconde contribution) *Supposons que l'observation de l'encodeur soit une peinture du graphe auxiliaire \mathcal{G} . La fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ qui minimise la cardinalité $|\mathcal{R}|$ est exactement le coloriage minimal du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$.*

Le théorème 4.10 est publié dans [79] et sa démonstration est présentée à la section 4.10. Elle se déroule en deux temps. Tout d'abord, nous montrons qu'un coloriage ϕ du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$ vérifie la propriété de reconstruction de l'observation parfaite de la définition 4.3. À l'inverse, si ϕ n'est pas un coloriage du graphe $\tilde{\mathcal{G}}$ nous montrons que l'observation du joueur J n'est pas parfaite. Lorsque les signaux $s_0 \in \mathcal{S}_0$ et $s \in \mathcal{S}$ sont générés à travers une probabilité de transition corrélée $\tilde{\Upsilon} : \mathcal{A} \rightarrow \Delta(\mathcal{S} \times \mathcal{S}_0)$, alors les théorèmes 4.8 et 4.10 ne sont plus valides.

4.2.4 Reconstruction pour plusieurs joueurs

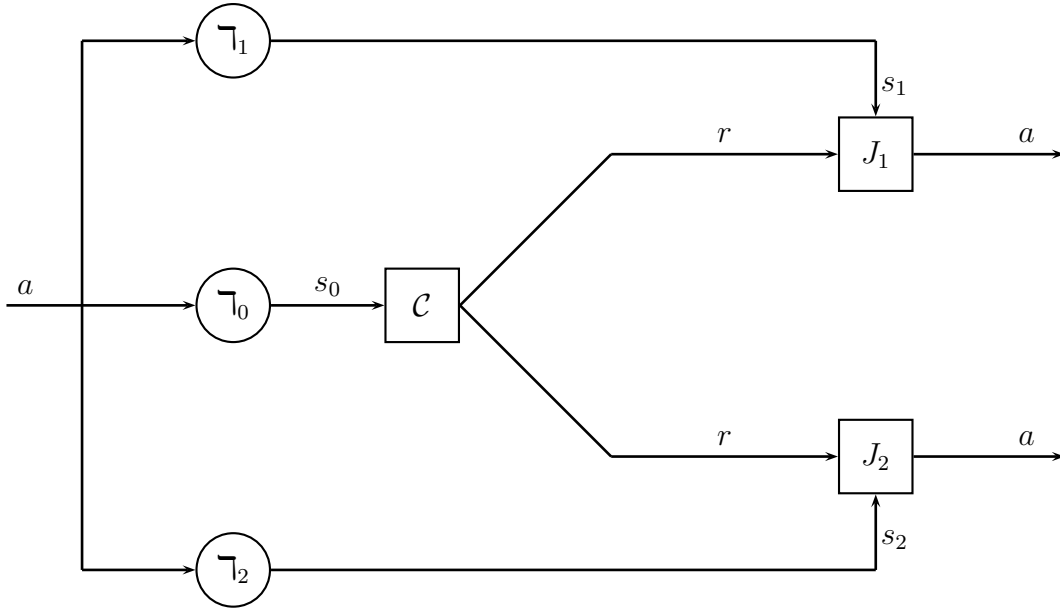


FIGURE 4.3 – Deux joueurs J_1 et J_2 observent chacun une version dégradée $s_k \in \mathcal{S}_k$ de l'action $a \in \mathcal{A}$ à travers un canal Υ_k avec $k \in \{J_1, J_2\}$. L'encodeur C observe une version dégradée $s_0 \in \mathcal{S}_0$ de l'action $a \in \mathcal{A}$ et renvoie un message commun $r \in \mathcal{R}$ à tous les joueurs K . Le joueur $k \in K$ reconstruit l'action $a \in \mathcal{A}$ grâce aux signaux $r \in \mathcal{R}$ et $s_k \in \mathcal{S}_k$.

Les résultats de la section précédente s'étendent facilement à la reconstruction simultanée de l'observation parfaite pour plusieurs joueurs. Le problème étudié dans cette

section est représenté par la figure 4.3. Considérons la reconstruction de l'observation parfaite pour plusieurs joueurs recevant un signal privé différent. Notons \mathcal{K} l'ensemble des joueurs et \mathcal{S}_k l'ensemble des signaux que reçoit le joueur $k \in \mathcal{K}$. La structure d'observation des joueurs est une famille de probabilités de transition $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$, définies par l'équation suivante :

$$\mathbb{T}_k : \mathcal{A} \longrightarrow \Delta(\mathcal{S}_k), \quad (4.10)$$

$$a \longrightarrow \mathbb{T}_k(s_k|a). \quad (4.11)$$

Remarque 4.11 Les résultats qui suivent ne considèrent que les structures d'observation indépendantes $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$. Cela signifie que pour chaque action $a \in \mathcal{A}$, les signaux $(s_k)_{k \in \mathcal{K}}$ sont générés par des probabilités indépendantes $\mathbb{T}_k(\cdot|a) \in \Delta(\mathcal{S}_k)$, $k \in \mathcal{K}$. À l'inverse, lorsque les signaux $(s_k)_{k \in \mathcal{K}}$ sont générés de manière corrélée ($\tilde{\mathbb{T}}(\cdot|a) \in \Delta(\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_K)$), alors les théorèmes 4.15 et 4.16 ne sont plus valables. La même conclusion s'impose lorsque le signal $s_0 \in \mathcal{S}_0$ reçu par l'encodeur \mathcal{C} est généré de manière corrélée avec les signaux $(s_k)_{k \in \mathcal{K}}$ à travers $\tilde{\mathbb{T}} : \mathcal{A} \longrightarrow \Delta(\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_K)$.

Définition 4.12 Soit $(\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ la structure d'observation des joueurs et \mathbb{T}_0 celle de l'encodeur. L'encodeur est capable de reconstruire l'observation parfaite pour tous les joueurs \mathcal{K} s'il existe un ensemble de signaux \mathcal{R} , une fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{R}$ et pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ une partition $(\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}$ de l'ensemble des paires de signaux $\theta_k(a) \subset \mathcal{S}_k \times \mathcal{R}$, indexée par $a \in \mathcal{A}$ tel que :

$$\sum_{(s_k, r) \in \theta_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \cdot \sum_{\substack{s_0 \in \mathcal{S}_0, \\ \phi(s_0) = r}} \mathbb{T}_0(s_0|a) = 1, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{K}. \quad (4.12)$$

Les résultats des théorèmes 4.8 et 4.10 s'étendent au cas d'une reconstruction de l'observation parfaite pour plusieurs joueurs en considérant un nouveau graphe auxiliaire noté $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$.

Définition 4.13 Définissons $\mathcal{S}_k(a)$, l'ensemble des signaux $s_k \in \mathcal{S}_k$ que peut recevoir le joueur $k \in \mathcal{K}$ lorsque l'action jointe $a \in \mathcal{A}$ est jouée.

$$\mathcal{S}_k(a) = \left\{ s_k \in \mathcal{S}_k \mid \mathbb{T}_k(s_k|a) > 0 \right\}. \quad (4.13)$$

Nous définissons un graphe pour lequel les sommets sont les actions $a \in \mathcal{A}$. Les arcs $e = (a, b)$ relient deux sommets s'il existe un joueur $k \in \mathcal{K}$ pour lequel les actions a et b correspondantes engendrent un même signal s_k avec une probabilité positive $\min(\mathbb{T}_k(s_k|a), \mathbb{T}_k(s_k|b)) > 0$.

Définition 4.14 Le graphe auxiliaire, noté $\mathcal{G}_K = (\mathcal{A}, E_K)$ est défini comme suit :

$$e = (a, b) \in E_K \iff \exists k \in K, \quad \mathcal{S}_k(a) \cap \mathcal{S}_k(b) \neq \emptyset. \quad (4.14)$$

La notion de peinture du graphe \mathcal{G}_K est définie par la définition 4.7. Le résultat d'existence s'étend au jeu avec K joueurs par le théorème suivant.

Théorème 4.15 (Seconde contribution) *L'encodeur est capable de reconstruire l'observation parfaite pour tous les joueurs $k \in K$ si et seulement si l'observation \mathcal{T}_0 est une peinture du graphe \mathcal{G}_K des joueurs K .*

Ce théorème est publié dans [79]. Afin de caractériser la fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ optimale, nous introduisons un second graphe, noté $\tilde{\mathcal{G}}_K$. Le graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_K$ correspond au graphe défini par la définition 4.9 en remplaçant l'ensemble des arêtes E par l'ensemble des arêtes E_K . Le résultat d'optimalité s'étend au jeu avec K joueurs par le théorème suivant.

Théorème 4.16 (Seconde contribution) *Supposons que l'observation de l'encodeur soit une peinture du graphe \mathcal{G}_K . La fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ qui minimise la cardinalité $|\mathcal{R}|$ est le coloriage minimal du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_K$.*

Ce théorème est publié dans [79]. L'encodeur envoie un signal commun $r \in \mathcal{R}$ reçu par tous les joueurs. Chacun des joueurs est capable de reconstruire l'observation parfaite à l'aide du signal privé $s_k \in \mathcal{S}_k$ et du signal commun $r \in \mathcal{R}$. Les démonstrations des théorèmes 4.15 et 4.16 découlent de celles des théorèmes 4.8 et 4.10 présentées aux sections 4.2.7.1 et 4.2.7.2 lorsque les graphes \mathcal{G}_K et $\tilde{\mathcal{G}}_K$ sont définis par l'équation 4.14.

4.2.5 Prix de la reconstruction

Afin d'évaluer l'efficacité de l'encodeur, nous introduisons le prix de la reconstruction de l'observation parfaite, noté PrixROP.

Définition 4.17 Définissons le prix de la reconstruction de l'observation parfaite :

$$\text{PrixROP} = \frac{\log_2 |\mathcal{A}|}{\log_2 |\mathcal{R}|} \in [1, +\infty[. \quad (4.15)$$

Lorsque ce prix est faible, cela signifie que l'encodeur doit ajouter une faible quantité d'information supplémentaire pour que le joueur reconstruise l'observation parfaite. Par exemple, un prix de 2 signifie qu'un bit d'information supplémentaire $r \in \mathcal{R}$ permet de reconstruire parfaitement deux bits d'information finale $a \in \mathcal{A}$.

4.2.6 Exemple appliqué au jeu du contrôle de puissance

Nous illustrons les résultats des théorèmes 4.8, 4.10, 4.15 et 4.16 grâce à un exemple inspiré du jeu du contrôle de puissance introduit par [33] et étudié au chapitre 3. Ce jeu considère que les joueurs choisissent la puissance de leur transmission de manière à maximiser l'efficacité énergétique de la communication. Dans le chapitre 3, nous avons étudié deux points d'utilité particuliers : l'utilité à l'équilibre de Nash du jeu en un coup notée u_k^* et définie par l'équation 3.6 et celle au point de coopération, notée \tilde{u}_k et définie par l'équation 3.27.

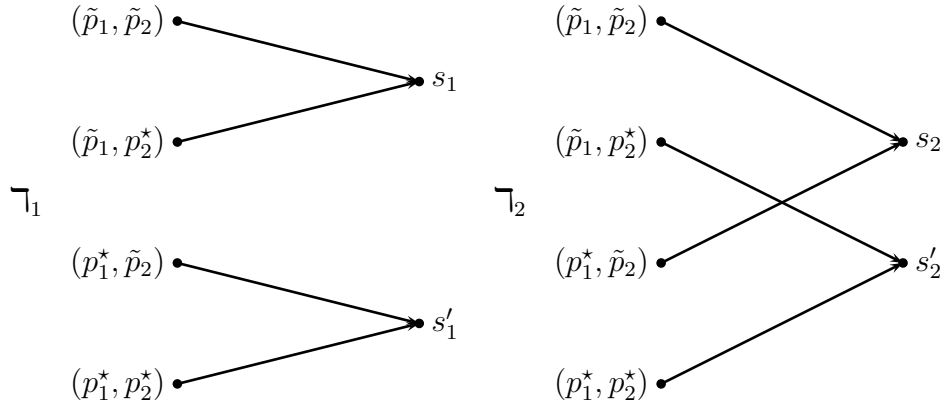


FIGURE 4.4 – Structure d'observation des joueurs J_1 et J_2 .

Nous considérons un jeu de contrôle de puissance à deux joueurs dans lequel les actions sont les puissances de transmission p_1 et p_2 . Chaque joueur peut choisir entre la puissance de l'équilibre de Nash p_k^* définie par l'équation 3.5 et celle du point de coopération \tilde{p}_k définie par l'équation 3.25. L'espace d'actions du joueur $k \in \mathcal{K}$ est défini par $\mathcal{A}_k = \{p_k^*, \tilde{p}_k\}$ et les fonctions d'utilités sont définies par l'équation 3.3. Fixons les paramètres du contrôle de puissance pour le cas CDMA aléatoire. Le nombre des joueurs est égal à $K = 2$, le nombre de symboles $M = 2$, le facteur d'étalement $N = 2$, les gains des canaux $|g_1|^2 = |g_2|^2 = 1$ et la variance du bruit $\sigma^2 = 1$. L'ensemble des utilités réalisables avec des stratégies pures et mixtes est décrit par la matrice de la figure 4.6 et la région de la figure 4.10.

Ce jeu est stratégiquement équivalent au "dilemme du prisonnier" présenté à la section 2.2 dans lequel l'équilibre de Nash correspond aux actions (p_1^*, p_2^*) et l'optimum social correspond aux actions $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$. Considérons les structures d'observation $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ des joueurs J_1 et J_2 définies dans la figure 4.4. Ces signaux modélisent la situation dans laquelle les joueurs observent seulement leur propre action. La structure d'observation de l'encodeur \mathcal{C} est définie par la figure 4.5.

- Suivant la définition 4.14, le graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ des joueurs J_1 et J_2 est décrit par la figure 4.7. La structure d'observation de l'encodeur \mathcal{T}_0 engendre un coloriage du graphe

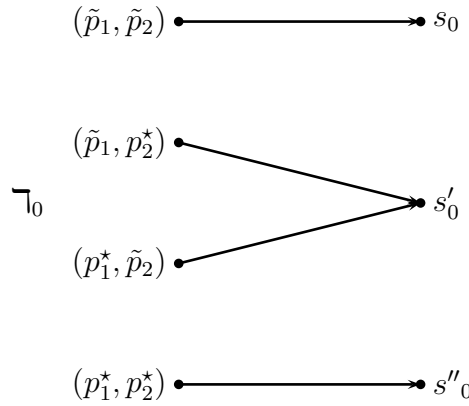


FIGURE 4.5 – Structure d'observation de l'encodeur \mathcal{C}

	\tilde{p}_2	p_2^*
\tilde{p}_1	0.23, 0.23	0.10, 0.34
p_1^*	0.34, 0.10	0.15, 0.15

FIGURE 4.6 – Matrice des utilités du jeu restreint.

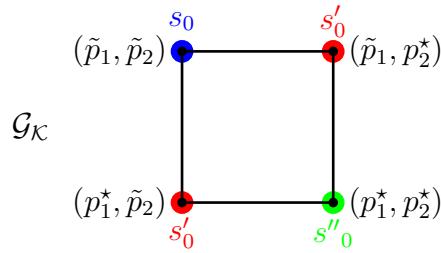


FIGURE 4.7 – Graphe d'observation \mathcal{G}_K des joueurs J_1 et J_2 .

des joueurs. D'après le théorème 4.8, l'encodeur est donc capable de reconstruire l'observation parfaite pour les joueurs J_1 et J_2 .

- Construisons le graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_K$ de l'encodeur. D'après le théorème 4.10, le coloriage minimal du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_K$ est précisément la fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ optimale en termes de cardinalité $|\mathcal{R}|$. Cette fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ optimale est décrite par la figure 4.9.

L'ajout d'un encodeur permet de reconstruire l'observation parfaite et de retrouver le théorème Folk. Le prix de la reconstruction de l'observation parfaite PrixROP est à

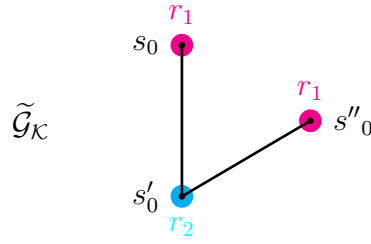


FIGURE 4.8 – Graphes bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{K}}$.

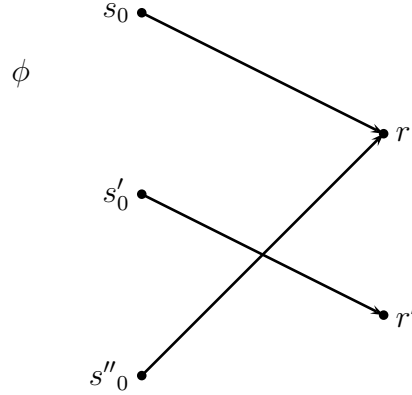


FIGURE 4.9 – Fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ optimale.

confronter au prix de l'anarchie PrixANA. Ce dernier mesure la différence entre l'utilité à l'équilibre de Nash et l'utilité à l'optimum social.

$$\text{PrixROP} = \frac{\log_2 |\mathcal{A}|}{\log_2 |\mathcal{R}|} = \frac{\log_2 4}{\log_2 2} = 2, \quad (4.16)$$

$$\text{PrixANA} = \frac{0.23}{0.15} = 1.53. \quad (4.17)$$

En conclusion, l'utilité à l'équilibre est 1.53 fois supérieure si l'encodeur ajoute 2 fois plus de bits de signaux. Si l'encodeur n'envoie aucun signal, les joueurs n'observent que leur propre action et la région des utilités d'équilibre est l'utilité cerclée de rouge de la figure 4.10. Si l'encodeur ajoute 2 fois plus de bits de signaux, les joueurs observent parfaitement les actions des autres et la région des utilités d'équilibre est la région bleue de la figure 4.10 : celle qui Pareto-domine les niveaux min-max.

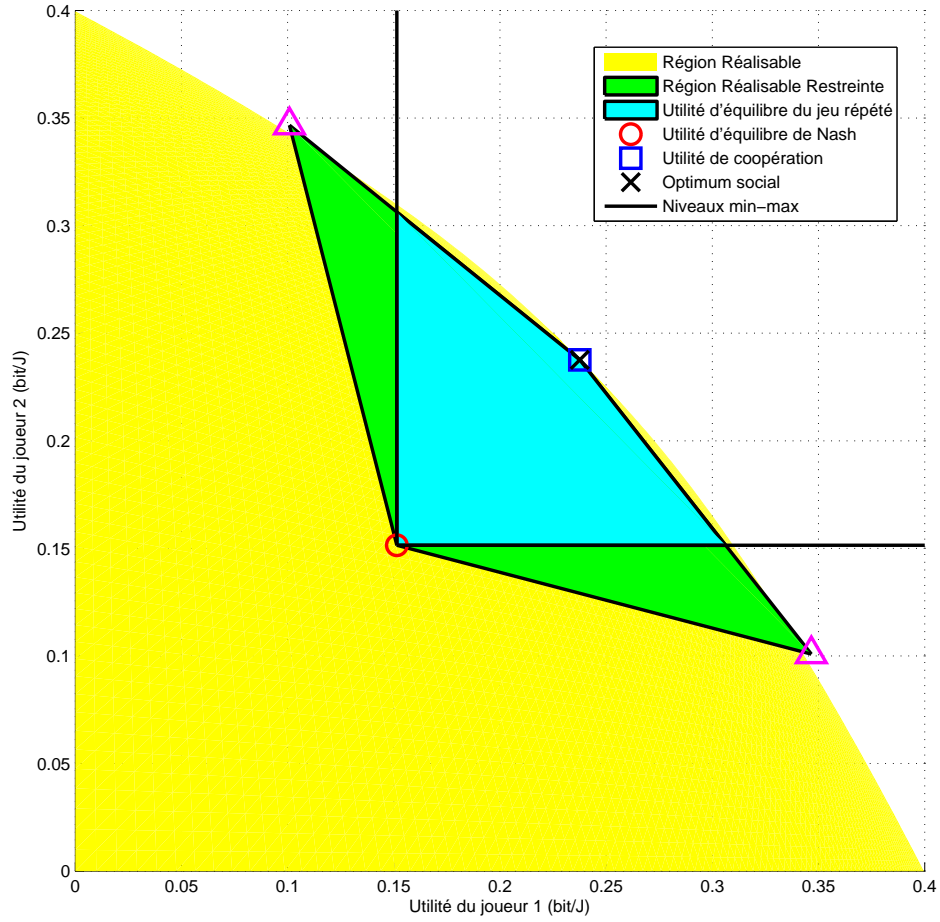


FIGURE 4.10 – Région des utilités restreintes réalisables pour $(K, M, N) = (2, 2, 2)$.

4.2.7 Démonstrations

4.2.7.1 Théorème 4.8

Condition nécessaire. Si \mathcal{T}_0 est une peinture de \mathcal{G} , alors pour chaque couple d'actions $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$, il existe deux possibilités :

- soit les signaux reçus par le joueur sont différents avec probabilité 1,
- soit les signaux reçus par l'encodeur sont différents avec probabilité 1.

Nous avons les relations d'équivalences suivantes :

$$e = (a, b) \in E \iff \mathcal{S}(a) \cap \mathcal{S}(b) \neq \emptyset \quad (4.18)$$

$$\iff \mathcal{S}_0(a) \cap \mathcal{S}_0(b) = \emptyset. \quad (4.19)$$

Choisissons l'ensemble des signaux $\mathcal{R} = \mathcal{S}_0$ et la fonction identité $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_0$. Définissons la partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ de l'ensemble des signaux $\theta(a) \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}_0$, indexée par $a \in \mathcal{A}$ par :

$$\theta(a) = \left\{ (s, s_0) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}_0 \mid s \in \mathcal{S}(a), \quad s_0 \in \mathcal{S}_0(a) \right\}. \quad (4.20)$$

Montrons que la famille $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ est une partition de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}_0$, indexée par $a \in \mathcal{A}$. Grâce à la propriété de peinture du graphe \mathcal{G} pour \mathbb{T}_0 , pour toute paire d'action $a, b \in \mathcal{A}$, les ensembles de signaux $\theta(a)$ et $\theta(b)$ sont disjoints.

$$\theta(a) = \mathcal{S}(a) \times \mathcal{S}_0(a) \subset \mathcal{S} \times \mathcal{R}, \quad (4.21)$$

$$\theta(b) = \mathcal{S}(b) \times \mathcal{S}_0(b) \subset \mathcal{S} \times \mathcal{R}. \quad (4.22)$$

En effet, pour chaque paire d'actions, il existe deux configurations : soit elles sont reliées, soit elles ne le sont pas.

- S'il n'existe pas d'arête $e = (a, b)$ dans le graphe \mathcal{G} , alors :

$$\mathcal{S}(a) \cap \mathcal{S}(b) = \emptyset \implies \theta(a) \cap \theta(b) = \emptyset. \quad (4.23)$$

- S'il existe une arête $e = (a, b)$ dans le graphe \mathcal{G} , alors :

$$\mathcal{S}_0(a) \cap \mathcal{S}_0(b) = \emptyset \implies \theta(a) \cap \theta(b) = \emptyset. \quad (4.24)$$

Dans les deux cas, la propriété d'observation parfaite est vérifiée.

$$\sum_{(s, s_0) \in \theta(a)} \mathbb{T}(s|a) \cdot \mathbb{T}_0(s_0|a) = \sum_{(s, s_0) \in \mathcal{S}(a) \times \mathcal{S}_0(a)} \mathbb{T}(s|a) \cdot \mathbb{T}_0(s_0|a) \quad (4.25)$$

$$= \sum_{s \in \mathcal{S}(a)} \mathbb{T}(s|a) \cdot \sum_{s_0 \in \mathcal{S}_0(a)} \mathbb{T}_0(s_0|a) \quad (4.26)$$

$$= 1, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.27)$$

En conclusion, si l'observation \mathbb{T}_0 de l'encodeur est une peinture du graphe \mathcal{G} , alors le joueur J observe donc parfaitement l'action $a \in \mathcal{A}$.

Condition suffisante. Supposons que l'observation de l'encodeur \mathbb{T}_0 ne soit pas une peinture du graphe du joueur \mathcal{G} . Nous montrons que pour tout ensemble de signaux \mathcal{R} ,

pour toute fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$, pour toute partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$, il existe une action $a \in \mathcal{A}$ telle que :

$$\sum_{(s,r) \in \theta(a)} \mathbb{T}(s|a) \cdot \sum_{\substack{s_0 \in \mathcal{S}_0, \\ \phi(s_0)=r}} \mathbb{T}_0(s_0|a) < 1. \quad (4.28)$$

Montrons tout d'abord que pour toute partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}_0$, il existe une action $a \in \mathcal{A}$ telle que :

$$\sum_{(s,s_0) \in \theta(a)} \mathbb{T}(s|a) \cdot \sum_{s_0 \in \mathcal{S}_0} \mathbb{T}_0(s_0|a) < 1. \quad (4.29)$$

L'observation de l'encodeur \mathbb{T}_0 n'est pas une peinture du graphe du joueur \mathcal{G} . Donc il existe une arête $e = (a, b)$ reliant deux sommets pour lesquels les ensembles de couleurs $\mathcal{S}_0(a)$ et $\mathcal{S}_0(b)$ possèdent un élément en commun. L'encodeur et le joueurs peuvent donc observer le même signal avec une probabilité strictement positive. Cela signifie qu'il existe une paire de signaux (s, s_0) et une paire d'actions (a, b) tels que :

$$s \in \mathcal{S}(a), \text{ et } s_0 \in \mathcal{S}_0(a), \quad \text{tel que} \quad \mathcal{P}(s, s_0|a) = \mathbb{T}(s|a) \cdot \mathbb{T}_0(s_0|a) > 0, \quad (4.30)$$

$$s \in \mathcal{S}(b), \text{ et } s_0 \in \mathcal{S}_0(b), \quad \text{tel que} \quad \mathcal{P}(s, s_0|b) = \mathbb{T}(s|b) \cdot \mathbb{T}_0(s_0|b) > 0. \quad (4.31)$$

Dans ce cas, pour toute partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ des signaux $\mathcal{S} \times \mathcal{S}_0$, soit $(s, s_0) \in \theta(a)$ ou soit $(s, s_0) \in \theta(b)$. Ce qui implique que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

$$\sum_{(s,s_0) \in \theta(a)} \mathbb{T}(s|a) \cdot \sum_{s_0 \in \mathcal{S}_0} \mathbb{T}_0(s_0|a) < 1, \quad (4.32)$$

$$\sum_{(s,s_0) \in \theta(b)} \mathbb{T}(s|b) \cdot \sum_{s_0 \in \mathcal{S}_0} \mathbb{T}_0(s_0|b) < 1. \quad (4.33)$$

Ce résultat reste vrai pour tout ensemble de signaux \mathcal{R} , pour toute fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ et pour toute partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ des signaux $\mathcal{S} \times \mathcal{R}$,

$$\sum_{(s,r) \in \theta(a)} \mathbb{T}(s|a) \cdot \sum_{\substack{s_0 \in \mathcal{S}_0, \\ \phi(s_0)=r}} \mathbb{T}_0(s_0|a) < 1, \quad (4.34)$$

$$\sum_{(s,r) \in \theta(a)} \mathbb{T}(s|b) \cdot \sum_{\substack{s_0 \in \mathcal{S}_0, \\ \phi(s_0)=r}} \mathbb{T}_0(s_0|b) < 1. \quad (4.35)$$

En conclusion, si l'observation \mathbb{T}_0 de l'encodeur n'est pas une peinture du graphe \mathcal{G} , alors la propriété d'observation parfaite n'est pas vérifiée. Nous avons montré l'équivalence entre le concept de peinture d'un graphe et la reconstruction de l'observation parfaite des actions $a \in \mathcal{A}$ pour un joueur J .

4.2.7.2 Théorème 4.10

La démonstration du théorème se déroule en deux temps. Tout d'abord, nous montrons qu'un coloriage ϕ du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$ vérifie la propriété de reconstruction de l'observation parfaite de la définition 4.3. À l'inverse, si ϕ n'est pas un coloriage du graphe $\tilde{\mathcal{G}}$ nous montrons que l'observation du joueur J n'est pas parfaite.

Condition nécessaire. Montrons que tout coloriage $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$ vérifie la propriété de reconstruction de l'observation parfaite de la définition 4.3. Définissons la partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ de l'ensemble des signaux $\theta(a) \subset \mathcal{S} \times \mathcal{R}$, indexée par $a \in \mathcal{A}$ par :

$$\theta(a) = \left\{ (s, r) \in \mathcal{S} \times \mathcal{R} \mid s \in \mathcal{S}(a), \quad r \in \phi(\mathcal{S}_0(a)) \right\}. \quad (4.36)$$

Montrons que la famille $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ est toujours une partition de $\mathcal{S} \times \mathcal{R}$, indexée par $a \in \mathcal{A}$. Grâce à la propriété de coloriage ϕ du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$, nous montrons que pour toute paire d'action $a, b \in \mathcal{A}$, les ensembles de signaux $\theta(a)$ et $\theta(b)$ sont disjoints.

$$\theta(a) = \mathcal{S}(a) \times \phi(\mathcal{S}_0(a)) \subset \mathcal{S} \times \mathcal{R}, \quad (4.37)$$

$$\theta(b) = \mathcal{S}(b) \times \phi(\mathcal{S}_0(b)) \subset \mathcal{S} \times \mathcal{R}. \quad (4.38)$$

En effet, pour chaque paire d'actions, il existe deux configurations : soit elles sont reliées dans le graphe \mathcal{G} , soit elles ne le sont pas.

- S'il n'existe pas d'arête $e = (a, b)$ dans le graphe \mathcal{G} , alors :

$$\mathcal{S}(a) \cap \mathcal{S}(b) = \emptyset \implies \theta(a) \cap \theta(b) = \emptyset. \quad (4.39)$$

- S'il existe une arête $e = (a, b)$ dans le graphe \mathcal{G} , alors pour tout $s_0 \in \mathcal{S}_0(a)$ et $s'_0 \in \mathcal{S}_0(b)$, nous avons $\phi(s_0) \neq \phi(s'_0)$ car ϕ est un coloriage de $\tilde{\mathcal{G}}$. Donc $\phi(\mathcal{S}_0(a)) \cap \phi(\mathcal{S}_0(b)) = \emptyset$ et,

$$\phi(\mathcal{S}_0(a)) \cap \phi(\mathcal{S}_0(b)) = \emptyset \implies \theta(a) \cap \theta(b) = \emptyset. \quad (4.40)$$

Dans les deux conditions, la propriété d'observation parfaite est vérifiée.

$$\sum_{(s,r) \in \theta(a)} \mathbb{1}(s|a) \cdot \sum_{\substack{s_0 \in \mathcal{S}_0, \\ \phi(s_0)=r}} \mathbb{1}_0(s_0|a) = \sum_{s \in \mathcal{S}(a)} \mathbb{1}(s|a) \cdot \sum_{r \in \phi(\mathcal{S}_0(a))} \sum_{\substack{s_0 \in \mathcal{S}_0, \\ \phi(s_0)=r}} \mathbb{1}_0(s_0|a) \quad (4.41)$$

$$= 1, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.42)$$

En conclusion, si la fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ est un coloriage du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$, alors la propriété de reconstruction de l'observation parfaite de la définition 4.3 est vérifiée.

Condition suffisante. Supposons que la fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ ne soit pas un coloriage du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$. Alors, il existe une paire de sommets $s_0 \in \mathcal{S}_0$ et $s'_0 \in \mathcal{S}_0$ qui est reliée par un arc $e \in \tilde{\mathbb{E}}$ et qui possèdent la même couleur. D'une part, la même couleur implique que le joueur recevra le même signal $r \in \mathcal{R}$ lorsque l'encodeur recevra $s_0 \in \mathcal{S}_0$ ou $s'_0 \in \mathcal{S}_0$. D'autre part, l'arc reliant $s_0 \in \mathcal{S}_0$ et $s'_0 \in \mathcal{S}_0$ signifie qu'il existe deux actions $(a, b) \in \mathcal{A}^2$ pour lesquelles le joueur peut recevoir le même signal $s \in \mathcal{S}$ et l'encodeur peut recevoir les signaux $s_0 \in \mathcal{S}_0$ pour l'action $a \in \mathcal{A}$ et $s'_0 \in \mathcal{S}_0$ pour l'action $b \in \mathcal{A}$.

Si le coloriage de $\tilde{\mathcal{G}}$ attribue la même couleur $r \in \mathcal{R}$ aux signaux $s_0 \in \mathcal{S}_0$ et $s'_0 \in \mathcal{S}_0$, alors le joueur peut recevoir avec une probabilité positive, le signal $(s, r) \in \mathcal{S} \times \mathcal{R}$ lorsque les actions $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$ sont jouées.

- $s \in \mathcal{S}(a)$ et $r = \phi(s_0)$, avec $s_0 \in \mathcal{S}_0(a)$, tel que

$$\mathcal{P}(s, r|a) = \mathbb{I}(s|a) \cdot \sum_{s_0 \in \mathcal{S}_0} \mathbb{I}_0(s_0|a) \cdot \mathbb{1}(r = \phi(s_0)) > 0, \quad (4.43)$$

- $s \in \mathcal{S}(b)$ et $r = \phi(s_0)$, avec $s_0 \in \mathcal{S}_0(b)$, tel que

$$\mathcal{P}(s, r|b) = \mathbb{I}(s|b) \cdot \sum_{s'_0 \in \mathcal{S}_0} \mathbb{I}_0(s'_0|b) \cdot \mathbb{1}(r = \phi(s'_0)) > 0. \quad (4.44)$$

Dans ce cas, suivant que $(s, s_0) \in \theta(a)$ ou que $(s, s_0) \in \theta(b)$, pour toute partition $(\theta(a))_{a \in \mathcal{A}}$ des signaux $\mathcal{S} \times \mathcal{S}_0$, soit l'une ou l'autre des conditions suivantes est vérifiée.

$$\sum_{(s, s_0) \in \theta(a)} \mathbb{I}(s|a) \cdot \sum_{s_0 \in \mathcal{S}_0} \mathbb{I}_0(s_0|a) < 1, \quad (4.45)$$

$$\sum_{(s, s_0) \in \theta(a)} \mathbb{I}(s|b) \cdot \sum_{s_0 \in \mathcal{S}_0} \mathbb{I}_0(s_0|b) < 1. \quad (4.46)$$

En conclusion, si $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ n'est pas un coloriage du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}$ alors la propriété d'observation parfaite n'est pas vérifiée. Ceci implique que la fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ optimale pour réduire la cardinalité $|\mathcal{R}|$ est exactement le coloriage minimal du graphe bi-auxiliaire. Nous avons montré l'équivalence entre le concept de coloriage du graphe bi-auxiliaire et la reconstruction optimale de l'observation parfaite des actions $a \in \mathcal{A}$ pour un joueur J .

4.3 Reconstruction de l'observation ε -parfaite

Nous avons étudié, dans la section précédente 4.3 la reconstruction de l'observation parfaite assistée d'un encodeur. Il existe cependant d'autres structures de signaux pour lesquelles la caractérisation des utilités d'équilibre est disponible. La structure d'observation ε -parfaite est présentée à la section 2.5.2.3 et permet de garantir un théorème Folk [40]. Dans cette section, nous cherchons à reconstruire l'observation ε -parfaite à l'aide d'un signal supplémentaire envoyé aux joueurs \mathcal{K} par un encodeur \mathcal{C} . La situation que nous considérons est décrite par la figure 4.3 de la section 4.2.4.

La section 4.3.1 est consacrée aux définitions de l'observation ε -parfaite ainsi qu'à sa reconstruction à l'aide des signaux supplémentaires d'un encodeur. Dans la section 4.3.2, nous proposons un ensemble de couples de structures d'observation $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ et \mathbb{T}_0 pour lesquels l'encodeur est capable de reconstruire l'observation ε -parfaite des actions $a \in \mathcal{A}$ passées. Lorsque c'est le cas, nous donnons, dans la section 4.3.3, une fonction de reconstruction qui réduit la cardinalité $|\mathcal{R}|$ de l'ensemble des signaux que l'encodeur envoie aux joueurs. La section 4.3.4 introduit le prix de la reconstruction de l'observation ε -parfaite. La section 4.3.5 présente un exemple de reconstruction pour le cas du jeu de contrôle de puissance étudié au chapitre 3.

4.3.1 Observation ε -parfaite assistée d'un encodeur

Considérons une structure d'observation $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ définies par l'équation (4.10).

Définition 4.18 Une structure d'observation $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ avec $\mathbb{T}_k : \mathcal{A} \rightarrow \Delta(\mathcal{S}_k)$ est ε -parfaite avec $\varepsilon > 0$, si pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$, il existe une partition $(\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}$ de l'ensemble des signaux \mathcal{S}_k indexée par $a \in \mathcal{A}$ telle que :

$$\sum_{s_k \in \theta_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.47)$$

Pour une structure d'observation fixée, nous caractérisons la précision de l'observation en utilisant une formulation de type min-max.

Proposition 4.19 Pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$, la notation $(\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}$ désigne une partition de l'ensemble des signaux \mathcal{S}_k indexée par $a \in \mathcal{A}$. Une structure d'observation \mathbb{T} est ε -parfaite si et seulement si :

$$\min_{k \in \mathcal{K}} \max_{\theta_k = (\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}} \min_{a \in \mathcal{A}} \sum_{s_k \in \theta_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \geq 1 - \varepsilon \quad (4.48)$$

$$\iff \max_{k \in \mathcal{K}} \min_{\theta_k = (\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}} \max_{a \in \mathcal{A}} \sum_{s_k \notin \theta_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \leq \varepsilon. \quad (4.49)$$

La démonstration de cette proposition est énoncée à la section 4.3.6.1.

Définition 4.20 Soit $(\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ la structure d'observation des joueurs et \mathbb{T}_0 celle de l'encodeur. L'encodeur est capable de reconstruire l'observation ε -parfaite s'il existe un ensemble de signaux \mathcal{R} , une fonction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ et pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$, une

partition $(\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}$ de l'ensemble des paires de signaux $\mathcal{S}_k \times \mathcal{R}$, indexée par $a \in \mathcal{A}$ tels que :

$$\sum_{(s_k, r) \in \theta_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \cdot \sum_{\substack{s_0 \in \mathcal{S}_0, \\ \phi(s_0)=r}} \mathbb{T}_0(s_0|a) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{K}. \quad (4.50)$$

4.3.2 Existence de la reconstruction de l'observation ε -parfaite

Les résultats que nous présentons dans cette section sont basés sur le coloriage des graphes présenté par la définition 4.4. Nous proposons un ensemble de couples de structures d'observation $(\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ et \mathbb{T}_0 qui autorisent l'encodeur à reconstruire l'observation ε -parfaite grâce au concept de coloriage d'un graphe. La précision de l'observation conjointe de l'encodeur et des joueurs est difficile à caractériser. Si l'observation du joueur est précise sur certains sous-ensembles d'actions, si l'observation de l'encodeur est précise sur un autre sous-ensemble d'actions et si les structures d'observation se complètent mutuellement sur tous les sous-ensembles d'actions, alors nous montrons que l'encodeur est capable de reconstruire l'observation ε -parfaite.

Définition 4.21 Pour chaque action $a \in \mathcal{A}$, nous associons un signal admissible pour le joueur $k \in \mathcal{K}$ noté $\tilde{S}_k(a)$ et pour l'encodeur $\tilde{S}_0(a)$.

$$\tilde{S}_k(a) = \left\{ s \in \mathcal{S} \mid \mathbb{T}_k(s_k|a) > \frac{1}{2} \right\}, \quad (4.51)$$

$$\tilde{S}_0(a) = \left\{ s_0 \in \mathcal{S}_0 \mid \mathbb{T}_0(s_0|a) > \frac{1}{2} \right\}. \quad (4.52)$$

Remarque 4.22 Les ensembles $\tilde{S}_k(a)$ et $\tilde{S}_0(a)$ contiennent au plus un élément.

Le graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ des joueurs \mathcal{K} est défini à l'aide de ces ensembles. Deux actions a, b sont reliées par un arc $e = (a, b)$ s'il existe un joueur pour lequel le même signal s_k est tiré avec probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ lorsque les actions a, b sont jouées.

Définition 4.23 Le graphe auxiliaire $\mathcal{G}_{\mathcal{K}} = (\mathcal{A}, E_{\mathcal{K}})$ des joueurs \mathcal{K} est défini comme suit :

$$e = (a, b) \in E_{\mathcal{K}} \iff \exists k \in \mathcal{K}, \quad \tilde{S}_k(a) = \tilde{S}_k(b). \quad (4.53)$$

L'observation de l'encodeur \mathbb{T}_0 est complémentaire de celle des joueurs $(\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ si elle vérifie la propriété de coloriage suivante.

Définition 4.24 L'observation de l'encodeur \mathbb{T}_0 est un coloriage du graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ si la propriété suivante est vérifiée :

$$e = (a, b) \in E_{\mathcal{K}} \iff \tilde{S}_0(a) \neq \tilde{S}_0(b). \quad (4.54)$$

La propriété de coloriage implique que les structures d'observation T_0 et $(\mathsf{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ sont complémentaires l'une de l'autre. Il reste à évaluer la précision que peut garantir l'observation conjointe des actions $a \in \mathcal{A}$ passées à travers T_0 et $(\mathsf{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$. Le paramètre $\frac{1}{2}$ des équations 4.51 et 4.52 nous autorise à définir une relation sur les actions qui est réflexive, symétrique et transitive. Cette relation d'équivalence nous permet de dégager, pour chaque action $a \in \mathcal{A}$, le signal le plus probable. La précision de l'observation T_k du joueur $k \in \mathcal{K}$ est évaluée à l'aide de classes d'équivalence notées $\alpha_k \in \Lambda_k$ et définies par :

$$\alpha_k = \left\{ a \in \mathcal{A} \mid \tilde{S}_k(a) = \tilde{S}_k(\alpha_k) \right\}. \quad (4.55)$$

Deux actions, $a \in \mathcal{A}$ et $a' \in \mathcal{A}$ sont équivalentes pour le joueur $k \in \mathcal{K}$ si le même signal s_k est tiré avec une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ lorsque les actions $a \in \mathcal{A}$ ou $a' \in \mathcal{A}$ sont jouées :

$$\min \left(\mathsf{T}_k(s_k|a), \mathsf{T}_k(s_k|a') \right) \geq \frac{1}{2}. \quad (4.56)$$

La précision de l'observation T_0 de l'encodeur \mathcal{C} est évaluée à l'aide de classes d'équivalence notées $\alpha_0 \in \Lambda_0$ et définies par :

$$\alpha_0 = \left\{ a \in \mathcal{A} \mid \tilde{S}_0(a) = \tilde{S}_0(\alpha_0) \right\}. \quad (4.57)$$

Nous évaluons la précision des structures d'observation T_0 et $(\mathsf{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ à l'aide des classes d'équivalence $\alpha_0 \in \Lambda_0$ et $\alpha_k \in \Lambda_k$.

Définition 4.25 Considérons $k \in \mathcal{K} \cup \{0\}$, un joueur ou l'encodeur. La structure d'observation T_k est x -parfaite sur les classes d'équivalence $\alpha_k \in \Lambda_k$ s'il existe une partition $(\theta_k(\alpha_k))_{\alpha_k \in \Lambda_k}$ de l'ensemble des signaux S_k , indexée par les classes d'équivalence $\alpha_k \in \Lambda_k$, tels que :

$$\sum_{\substack{s_k \in \theta_k(\alpha_k), \\ \alpha_k \ni a}} \mathsf{T}_k(s_k|a) \geq 1 - x, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.58)$$

Cette définition est valable pour l'observation T_k de chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ ainsi que pour l'observation T_0 de l'encodeur \mathcal{C} . Les classes d'équivalence nous permettent de quantifier la précision du monitoring conjoint. Grâce à ces outils, il nous est possible d'énoncer le résultat d'existence qui suit.

Théorème 4.26 (Seconde contribution) *L'encodeur est capable de reconstruire l'observation ε -parfaite s'il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que les conditions suivantes soient vérifiées.*

- L'observation de l'encodeur \mathcal{T}_0 est un coloriage du graphe \mathcal{G}_K .
- Pour tout joueur $k \in K$, \mathcal{T}_k est x -parfaite sur les classes d'équivalence $\alpha_k \in \Lambda_k$.
- L'observation de l'encodeur \mathcal{T}_0 est y -parfaite sur les classes d'équivalence $\alpha_0 \in \Lambda_0$.
- $x + y - xy \leq \varepsilon$.

Ce théorème est publié dans [79] et sa démonstration du théorème est présentée à la section 4.26. Lorsque les hypothèses du théorème 4.26 sont satisfaites, nous montrons que l'encodeur est capable de reconstruire l'observation ε -parfaite.

4.3.3 Une reconstruction qui réduit la cardinalité $|\mathcal{R}|$

Nous montrons que les outils développés à la section 4.2.3 s'appliquent à la reconstruction de l'observation ε -parfaite. En particulier, ces outils permettent d'éliminer la redondance entre les informations des signaux privés reçus par les joueurs et celles des signaux que reçoit l'encodeur. Le résultat de cette section est basé sur le coloriage du graphe bi-auxiliaire énoncé par la définition 4.9. Ce graphe bi-auxiliaire est construit de la même manière que celui de la section 4.2.4 en prenant en compte les arêtes du graphe auxiliaire \mathcal{G}_K défini par la définition 4.23.

Théorème 4.27 (Seconde contribution) *Supposons que l'observation de l'encodeur soit un coloriage du graphe auxiliaire \mathcal{G}_K . Le coloriage minimal du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_K$ est une fonction de reconstruction $\phi : S_0 \rightarrow \mathcal{R}$ qui réduit le nombre de symboles envoyés $|\mathcal{R}|$ aux joueurs.*

Le théorème 4.27 est publié dans [79] et sa démonstration découle de celle du théorème 4.10 présenté à la section 4.2.7.2. Cette fonction de reconstruction n'est pas nécessairement optimale. En effet, la propriété de coloriage implique que la partition de l'ensemble des signaux induite sur $S_k \times S_0$ est, pour chaque joueur, un produit cartésien des partitions sur les signaux S_k et S_0 . Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, la partition $(\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}$ des signaux $S_k \times S_0$ qui est optimale pour l'équation 4.49, n'est pas nécessairement orthogonale. Ce problème nécessite l'emploi d'outils mathématiques plus élaborés.

4.3.4 Prix de la reconstruction

Nous introduisons le prix de la reconstruction de l'observation ε -parfaite, noté PrixROEP dans le but d'évaluer l'efficacité de cette reconstruction et de quantifier le coût de la reconstruction en termes de signaux supplémentaires.

Définition 4.28 Définissons le prix de la reconstruction de l'observation ε -parfaite :

$$\text{PrixROEP} = \frac{\log_2 |\mathcal{A}|}{\log_2 |\mathcal{R}|} \in [1, +\infty[. \quad (4.59)$$

Ce rapport nous permet de mesurer la quantité d'information supplémentaire $\log_2 |\mathcal{R}|$ dont les joueurs ont besoin pour reconstruire l'observation ε -parfaite des actions passées \mathcal{A} .

4.3.5 Exemple appliqué au jeu du contrôle de puissance

L'exemple de la section 4.2.6 est considéré sous l'angle de l'observation ε -parfaite. Nous étudions la reconstruction de l'observation ε -parfaite lorsque les structures d'observation \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 et \mathcal{T}_0 sont données par les figures 4.11 et 4.12 avec les paramètres $x, x', y \in]0, 1[$. Les signaux observés par les joueurs et l'encodeur sont les mêmes que

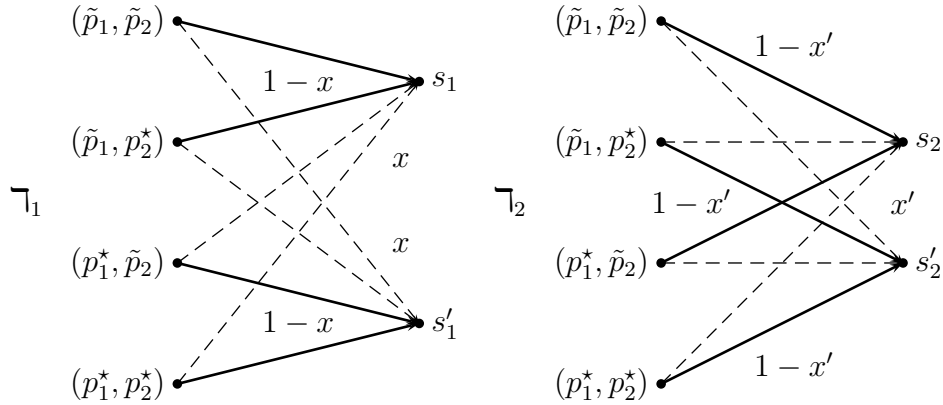


FIGURE 4.11 – Structures d'observation des joueurs J_1 et J_2 avec précision x et x' .

ceux décrits par les figures 4.4 et 4.5 de la section 4.2.6 précédente avec une probabilité d'erreur x pour \mathcal{T}_1 , x' pour \mathcal{T}_2 et y pour \mathcal{T}_0 . Supposons que la précision des observations des joueurs satisfasse $x' \leq x$. Montrons que les structures d'observation ci-dessus satisfont les conditions du théorème 4.26. L'encodeur est alors capable de reconstruire l'observation ε -parfaite pour les joueurs J_1 et J_2 lorsque $x + y - xy \leq \varepsilon$. Le graphe des joueurs \mathcal{G}_K est défini par la figure 4.13. D'après la définition 4.23, l'observation de l'encodeur \mathcal{T}_0 est un coloriage du graphe des joueurs \mathcal{G}_K . Notons $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ l'ensemble des classes d'équivalence pour l'encodeur \mathcal{C} et pour les joueurs J_1 et J_2 dont les définitions sont données par les équations 4.55 et 4.57. Pour les structures d'observation \mathcal{T}_0 , \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , nous avons :

$$\Lambda_0 = \{(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2); ((p_1^*, \tilde{p}_2), (\tilde{p}_1, p_2^*)); (p_1^*, p_2^*)\} = \{\alpha_0, \alpha_0', \alpha_0''\}, \quad (4.60)$$

$$\Lambda_1 = \{((\tilde{p}_1, \tilde{p}_2), (\tilde{p}_1, p_2^*)); ((p_1^*, \tilde{p}_2), (p_1^*, p_2^*))\} = \{\alpha_1, \alpha_1'\}, \quad (4.61)$$

$$\Lambda_2 = \{((\tilde{p}_1, \tilde{p}_2), (p_1^*, \tilde{p}_2)); ((\tilde{p}_1, p_2^*), (p_1^*, p_2^*))\} = \{\alpha_2, \alpha_2'\}. \quad (4.62)$$

Nous montrons que les structures de signaux $(\mathcal{T}_k)_{k \in K}$ et \mathcal{T}_0 sont x et y -parfaites sur les classes d'équivalence Λ_0, Λ_1 et Λ_2 au sens de la définition 4.25. Choisissons les partitions

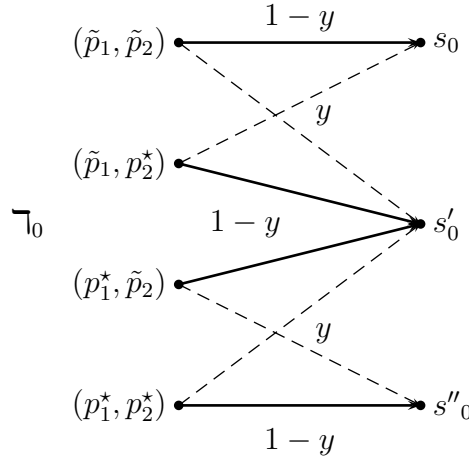


FIGURE 4.12 – Structure d'observation de l'encodeur \mathcal{C} avec précision y .

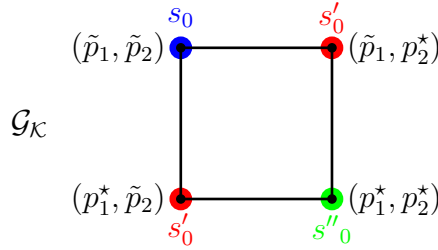


FIGURE 4.13 – Graphe d'observation \mathcal{G}_K des joueurs J_1 et J_2 .

$(\chi_0(\alpha_0))_{\alpha_0 \in \Lambda_0}$, $(\chi_1(\alpha_1))_{\alpha_1 \in \Lambda_1}$ et $(\chi_2(\alpha_2))_{\alpha_2 \in \Lambda_2}$ suivantes :

$$\chi_0(\alpha_0) = s_0, \quad \chi_0(\alpha'_0) = s'_0, \quad \chi_0(\alpha''_0) = s''_0, \quad (4.63)$$

$$\chi_1(\alpha_1) = s_1, \quad \chi_1(\alpha'_1) = s'_1, \quad (4.64)$$

$$\chi_2(\alpha_2) = s_2, \quad \chi_2(\alpha'_2) = s'_2. \quad (4.65)$$

- Montrons que la structure d'observation \mathcal{T}_0 est y -parfaite sur les classes d'équivalence $\alpha_0 \in \Lambda_0$. Pour l'encodeur, le couple d'actions (\tilde{p}_1, p_2^*) appartient à la classe d'équivalence $\alpha'_0 = ((p_1^*, \tilde{p}_2), (\tilde{p}_1, p_2^*))$. La partition des signaux \mathcal{S}_0 correspondant à cette classe d'équivalence est $\chi_0(\alpha'_0) = s'_0$. Nous avons donc :

$$\sum_{\substack{s_0 \in \chi_0(\alpha'_0), \\ \alpha'_0 \ni (\tilde{p}_1, p_2^*)}} \mathcal{T}_0(s_0 | (\tilde{p}_1, p_2^*)) = \mathcal{T}_k(s'_0 | (\tilde{p}_1, p_2^*)) \geq 1 - y. \quad (4.66)$$

Pour chaque couple d'actions $(p_1, p_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, la structure d'observation \mathcal{T}_0 est y -parfaite au sens de la définition 4.25.

- De même, nous montrons que les structures d'observation \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont respectivement x et x' -parfaites. Puisque $x' \leq x$, les structures d'observation \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont toutes deux x -parfaites.

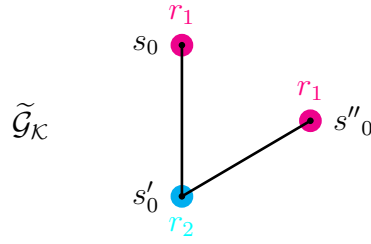


FIGURE 4.14 – Graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{K}}$.

D'après le théorème 4.26, l'encodeur est capable de reconstruire l'observation ε -parfaite pour $\varepsilon = x + y - xy$. De plus, d'après le théorème 4.27, le coloriage minimal $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ du graphe bi-auxiliaire $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{K}}$ donné par la figure 4.14 réduit le nombre de symboles $|\mathcal{R}|$ que l'encodeur envoie aux joueurs. Cette fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ est décrite par la figure 4.15. L'ajout d'un encodeur permet de reconstruire l'observation ε -parfaite

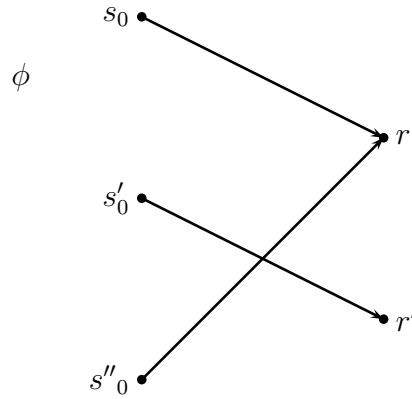


FIGURE 4.15 – Fonction de reconstruction $\phi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ qui réduit la cardinalité $|\mathcal{R}|$.

et de retrouver le théorème Folk lorsque $\varepsilon = x + y - xy$. Le prix de la reconstruction de l'observation ε -parfaite est le même que dans la section 4.2 et vaut :

$$\text{PrixROEP} = \frac{\log_2 |\mathcal{A}|}{\log_2 |\mathcal{R}|} = \frac{\log_2 4}{\log_2 2} = 2. \quad (4.67)$$

Les gains, en termes d'utilité d'équilibre, apportés par l'encodeur sont similaires à ceux de la section 4.2.6 et la région des utilités d'équilibre apparaît figure 4.10.

4.3.6 Démonstrations

4.3.6.1 Proposition 4.19

Par définition, la structure d'observation $(\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ est ε -parfaite si :

$$\begin{aligned}
& \forall k \in \mathcal{K}, \exists \theta_k = (\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}, \forall a \in \mathcal{A}, \sum_{s_k \in \theta_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \geq 1 - \varepsilon \\
& \iff \forall k \in \mathcal{K}, \exists \theta_k = (\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}, \min_{a \in \mathcal{A}} \sum_{s_k \in \theta_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \geq 1 - \varepsilon \\
& \iff \min_{k \in \mathcal{K}} \max_{\theta_k = (\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}} \min_{a \in \mathcal{A}} \sum_{s_k \in \theta_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \geq 1 - \varepsilon \\
& \iff \max_{k \in \mathcal{K}} \min_{\theta_k = (\theta_k(a))_{a \in \mathcal{A}}} \max_{a \in \mathcal{A}} \sum_{s_k \notin \theta_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

La structure d'observation est ε -parfaite si l'erreur d'observation est inférieure à $\varepsilon > 0$.

4.3.6.2 Théorème 4.26

D'après les hypothèses du théorème 4.26, nous supposons qu'il existe une paire $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telle que les conditions suivantes sont vérifiées.

- L'observation de l'encodeur \mathbb{T}_0 est un coloriage du graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$.
- Pour tout joueur $k \in \mathcal{K}$, \mathbb{T}_k est x -parfaite sur les classes d'équivalence $\alpha_k \in \Lambda_k$.
- L'observation \mathbb{T}_0 est y -parfaite sur les classes d'équivalence $\alpha_0 \in \Lambda_0$.
- $x + y - xy \leq \varepsilon$.

Choisissons l'ensemble des signaux $\mathcal{R} = \mathcal{S}_0$ et la fonction identité $\phi : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_0$. Pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$, notons $(\theta_k(\alpha_k))_{\alpha_k \in \Lambda_k}$ la partition de l'ensemble des signaux \mathcal{S}_k , indexée par les classes d'équivalence $\alpha_k \in \Lambda_k$ telle que :

$$\sum_{\substack{s_k \in \theta_k(\alpha_k), \\ \alpha_k \ni a}} \mathbb{T}_k(s_k|a) \geq 1 - x, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.68)$$

De même pour l'encodeur \mathcal{C} , notons $(\chi_0(\alpha_0))_{\alpha_0 \in \Lambda_0}$ la partition de l'ensemble des signaux \mathcal{S}_0 , indexée par les classes d'équivalence $\alpha_0 \in \Lambda_0$ telle que :

$$\sum_{\substack{s_0 \in \chi_0(\alpha_0), \\ \alpha_0 \ni a}} \mathbb{T}_0(s_0|a) \geq 1 - y, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.69)$$

Pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$, définissons la nouvelle partition $(\tilde{\theta}_k(a))_{a \in \mathcal{A}}$ des signaux $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_0$, indexée par les actions $a \in \mathcal{A}$.

$$\tilde{\theta}_k(a) = \left\{ (s_k, s_0) \in \mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_0 \mid s_k \in \theta_k(\alpha_k), a \in \alpha_k, \quad s_0 \in \chi_0(\alpha_0), a \in \alpha_0 \right\}. \quad (4.70)$$

Montrons que pour tout joueur $k \in \mathcal{K}$, la famille $(\tilde{\theta}_k(a))_{a \in \mathcal{A}}$ est une partition de $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_0$, indexée par $a \in \mathcal{A}$. Grâce à la propriété de coloriage du graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ pour \mathbb{T}_0 , nous montrons que pour toute paire d'actions $a, b \in \mathcal{A}$ les ensembles de signaux $\tilde{\theta}_k(a)$ et $\tilde{\theta}_k(b)$ sont disjoints. Pour chaque paire d'actions a et b , il existe deux configurations : soit elles sont reliées par une arête $e = (a, b) \in E$, soit elles ne le sont pas.

- S'il n'existe pas d'arête $e = (a, b)$ dans le graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$, alors :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k(a) \neq \tilde{S}_k(b) &\implies \exists \alpha_k, \alpha'_k \in \Lambda_k, \text{ tel que } a \in \alpha_k \text{ et } b \in \alpha'_k \\ &\implies \tilde{\theta}_k(a) \cap \tilde{\theta}_k(b) = \emptyset. \end{aligned} \quad (4.71)$$

puisque par définition de la partition, $\theta_k(\alpha_k) \cap \theta_k(\alpha'_k) = \emptyset$.

- S'il existe une arête $e = (a, b)$ dans le graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$, alors la propriété de coloriage implique :

$$\tilde{S}_k(a) = \tilde{S}_k(b) \implies \tilde{S}_0(a) \neq \tilde{S}_0(b) \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} &\implies \exists \alpha_0, \alpha'_0 \in \Lambda_0, \text{ tel que } a \in \alpha_0 \text{ et } b \in \alpha'_0 \\ &\implies \tilde{\theta}_k(a) \cap \tilde{\theta}_k(b) = \emptyset. \end{aligned} \quad (4.73)$$

puisque par définition de la partition, $\chi_0(\alpha_0) \cap \chi_0(\alpha'_0) = \emptyset$.

Pour chaque paire d'actions $a, b \in \mathcal{A}$, les ensembles de signaux $\tilde{\theta}_k(a)$ et $\tilde{\theta}_k(b)$ sont disjoints. $(\tilde{\theta}_k(a))_{a \in \mathcal{A}}$ est donc une partition des ensembles de signaux du joueur $k \in \mathcal{K}$ indexée par les actions $a \in \mathcal{A}$. La propriété de coloriage implique que les structures d'observation \mathbb{T}_0 et $(\mathbb{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ sont complémentaires l'une de l'autre. Cette propriété nous permet d'extraire une partition $(\tilde{\theta}_k(a))_{a \in \mathcal{A}}$ des signaux $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_0$ indexée par les actions $a \in \mathcal{A}$ qui nous autorise à évaluer la précision de l'observation conjointe de $s_k \in \mathcal{S}_k$ et de $s_0 \in \mathcal{S}_0$.

$$\sum_{(s, s_0) \in \tilde{\theta}_k(a)} \mathbb{T}_k(s_k|a) \cdot \mathbb{T}_0(s_0|a) = \sum_{\substack{s_k \in \theta_k(\alpha_k), \\ a \in \alpha_k}} \mathbb{T}_k(s_k|a) \cdot \sum_{s_0 \in \chi_0(\alpha_0), a \in \alpha_0} \mathbb{T}_0(s_0|a) \quad (4.74)$$

$$= (1 - x)(1 - y) \quad (4.75)$$

$$= 1 - (x + y - xy) \quad (4.76)$$

$$\geq 1 - \varepsilon, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.77)$$

En conclusion, lorsque les hypothèses du théorème 4.26 sont satisfaites, alors pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$, l'observation conjointe $(\mathbb{T}_0, \mathbb{T}_k)$ est ε -parfaite.

4.4 Reconstruction asymptotique de l'observation parfaite

La reconstruction en un coup, d'une structure d'observation est étudiée dans les sections 4.2 et 4.3 précédentes. Les outils qui y sont développés permettent de reconstruire l'observation parfaite à chaque étape. Cependant, d'après le théorème de Shannon présenté à la section A.3, le débit symbole par symbole $\log |\mathcal{X}|$, d'une source d'information \mathbf{x} est bien plus élevé que le débit moyen $H(\mathbf{x})$ d'une suite asymptotique de symboles. Cette section est consacrée à la reconstruction asymptotique des suites d'actions choisies par les joueurs. Les propriétés du codage de source de Shannon [65] sont exploitées afin de caractériser le débit optimal d'une source asymptotique pour laquelle les informations sont les actions des joueurs. Ce débit optimal correspond à la quantité minimale d'information supplémentaire qu'un encodeur \mathcal{C} doit rajouter afin qu'un joueur J puisse reconstruire l'observation parfaite. Dans cette étude, nous supposons que la source des actions des joueurs est distribuée indépendamment et identiquement d'étape en étape et que le décodeur est un joueur J arbitraire. Le codage étudié doit permettre à ce joueur d'observer parfaitement la suite des actions passées. Le principal problème, étudié dans cette section, vient du fait qu'un joueur $k \in \mathcal{K}$ malintentionné a la possibilité de rompre le schéma de codage de Shannon [65] en utilisant une autre distribution de probabilités pour générer ses actions. Le schéma du codage, pour cette source d'information, doit rester fiable lorsque la distribution de probabilités des actions d'un joueur change d'étape en étape. Le modèle qui correspond à cette situation est celui d'une source d'information aux variations arbitraires. Les symboles sont générés par une distribution de probabilités dépendante d'un état qui varie de manière arbitraire, symbole après symbole. Ce problème a d'abord été introduit par Dobrušin, R.L. dans [22, 23]. Une formulation de type théorie des jeux a été étudiée par Berger, T. dans [14] et la preuve du théorème de codage apparaît dans [13] et [20]. Le débit optimal \mathcal{R}_s^* pour une source d'information \mathbf{a} dépendant d'un état $v \in \mathcal{V}$ qui varie de manière arbitraire est,

$$\mathcal{R}_s^* = \max_{P_v \in \Delta(\mathcal{V})} H_v(\mathbf{a}), \quad (4.78)$$

où le maximum est pris parmi les probabilités sur les états $P_v \in \Delta(\mathcal{V})$ et H est l'entropie de Shannon [65]. Les résultats d'Ahlswede [1, 2] étendent les précédents au cas des sources corrélées (\mathbf{a}, \mathbf{b}) aux variations arbitraires. Le théorème 4' [2] caractérise la région des couples $(\mathcal{R}_1^*, \mathcal{R}_2^*)$ de débits atteignables,

$$\mathcal{R}_1^* \geq \max_{P_v \in \Delta(\mathcal{V})} H_v(\mathbf{a}|\mathbf{b}), \quad (4.79)$$

$$\mathcal{R}_2^* \geq \max_{P_v \in \Delta(\mathcal{V})} H_v(\mathbf{b}|\mathbf{a}), \quad (4.80)$$

$$\mathcal{R}_1^* + \mathcal{R}_2^* \geq \max_{P_v \in \Delta(\mathcal{V})} H_v(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (4.81)$$

lorsqu'une condition de "positivité entropique", (énoncée page 221 de l'article [2]) est satisfaite.

$$H_v(\mathbf{a}|\mathbf{b}) \times H_v(\mathbf{b}|\mathbf{a}) > 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (4.82)$$

La compression d'une source où l'information est une suite d'actions choisie par des joueurs n'est pas étudiée à ce jour. Nous présentons, dans la section 4.4.1, le modèle de source étudié. Nous caractérisons le débit d'une telle source, en considérant deux situations. Dans la première situation, étudiée à la section 4.4.2, l'encodeur \mathcal{C} représente les suites d'actions passées $a^n \in \mathcal{A}^n$ par des messages $m \in \mathcal{M}$ afin que le joueur qui décode retrouve la suite d'actions correctes $\hat{a}^n = a^n \in \mathcal{A}^n$ avec une probabilité d'erreur arbitrairement faible. Le théorème 4.31 caractérise le débit minimal de cette source d'information aux variations arbitraires. Dans la deuxième situation, étudiée à la section 4.4.3, le joueur J observe, à travers le canal d'observation \mathcal{T} , une suite de signaux supplémentaires $s^n \in \mathcal{S}^n$ tirée en fonction de la suite d'actions jouée $a^n \in \mathcal{A}^n$. L'encodeur \mathcal{C} représente les suites d'actions $a^n \in \mathcal{A}^n$ par des messages $m \in \mathcal{M}$ en tenant compte de la distribution des signaux supplémentaires $s^n \in \mathcal{S}^n$ que peut recevoir le joueur qui décode. Le théorème 4.37 caractérise le débit minimal de cette source lorsque le joueur qui décode observe une information adjacente. Ce second modèle se rapproche de celui des travaux d'Ahlswede sur les sources corrélées puisque les variables aléatoires \mathbf{s} et \mathbf{a} sont corrélées. La différence principale avec nos travaux est la définition de l'état de la source et la technique de la preuve. Le fait de considérer les déviations unilatérales des joueurs nous oblige à transmettre sans erreur la suite d'actions d'un des joueurs. Notre preuve utilise une suite de coloriage de graphe où les sommets sont des symboles alors qu'Ahlswede [2] utilise un coloriage de graphe où les sommets sont des suites de symboles. Afin d'utiliser la loi des grands nombres pour les suites de symboles, cette technique de preuve nécessite la condition de "positivité entropique" de l'équation (4.82). Dans le cas de notre source d'information, cette condition est remplacée par une condition sur les suites d'états admissibles (4.84) et par le fait que la variable aléatoire \mathbf{s} ne dépende de l'état v qu'à travers \mathbf{a} . Notre résultat s'applique aux cas des transitions \mathcal{T} déterministes alors qu'une telle transition ne satisfait pas la contrainte d'Ahlswede. Les résultats des sections précédentes sont appliqués au jeu du contrôle de puissance pour les communications décentralisées dans la section 4.4.4. Les démonstrations sont présentées à la section 4.4.5.

4.4.1 Modèle d'une source d'actions aux variations arbitraires

Chaque joueur $k \in \mathcal{K}$ tire, d'étape en étape, une action $a_k \in \mathcal{A}_k$ avec la distribution de probabilités i.i.d. $\mathcal{P}_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$. Notons $a = (a_1, \dots, a_K)$ le vecteur des actions réalisées par les joueurs, $a^n = (a_1^n, \dots, a_K^n)$ la suite de vecteurs de longueur n . La source d'information que l'on considère est le vecteur $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K)$ des actions des joueurs.

Un encodeur \mathcal{C} est chargé de représenter les suites d'actions $a^n \in \mathcal{A}^n$ par des messages $m \in \mathcal{M}$. Le décodeur est un joueur J arbitraire. Ce dernier observe le message $m \in \mathcal{M}$ et reconstruit une suite d'actions $\hat{a}^n \in \mathcal{A}^n$. Le codage cherche à compresser les suites d'actions de manière à ce que le joueur J puisse retrouver la suite des actions passées avec une probabilité d'erreur arbitrairement faible. Le codage de source classique n'est pas adapté puisque un joueur malintentionné $i \in \mathcal{K}$ peut modifier la distribution de probabilités sur ses actions $\mathcal{Q}_i \neq \mathcal{P}_i$. Ce joueur peut choisir une suite d'actions qui induit une erreur dans le schéma de codage et modifie le résultat du jeu.

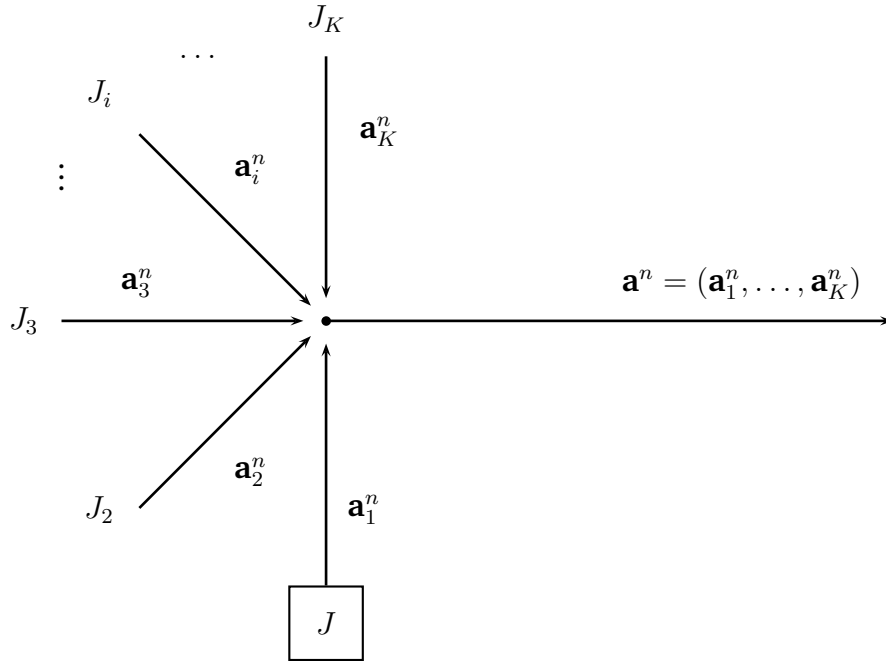


FIGURE 4.16 – Les joueurs $k \in \mathcal{K}$ choisissent leurs suites d'actions a_k^n avec une suite de distributions de probabilités indépendantes et identiquement distribuées $\mathcal{P}_k \in \Delta(\mathcal{K})$ d'étape en étape. Un joueur peut décider de choisir sa suite d'action à travers un processus stochastique différent de celui prescrit $\mathcal{P}_k^{\otimes n} \in \Delta(\mathcal{K})^n$. Le schéma du codage doit être fiable face à toutes les stratégies de déviations unilatérales des joueurs.

Nous étudions une source d'information aux variations arbitraires (AVS). L'information est modélisée par une suite de vecteurs de variables aléatoires $\mathbf{a}^n = (\mathbf{a}_1^n, \dots, \mathbf{a}_K^n)$ dont la distribution de probabilités $\mathcal{P}(\mathbf{a}^n | v^n)$ dépend d'une suite de paramètres d'états

$v^n = (v(t))_{t \in \{1, \dots, n\}} \in \mathcal{V}^n$ et est définie par :

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}^n | v^n) = \prod_{t=1}^n \mathcal{P}(\mathbf{a}(t) | v(t)). \quad (4.83)$$

Dans notre modèle, une suite d'états de la source $v^n \in \mathcal{V}^n$ est une suite de distributions sur une seule des composantes $i \in \mathcal{K}$ du vecteur aléatoire $\mathbf{a}^n = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K)^n$. Notons \mathcal{V}^n l'ensemble des suites d'états de la source.

$$\mathcal{V}^n = \cup_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k)^{\otimes n}. \quad (4.84)$$

Considérons par exemple, la suite d'états $v^n = (Q_i(1), \dots, Q_i(n)) \in \mathcal{V}^n$ qui modifie seulement la distribution de probabilités de la composante $i \in \mathcal{K}$ du vecteur de variables aléatoires $\mathbf{a}^n = (\mathbf{a}_1^n, \dots, \mathbf{a}_K^n)$. À l'étape t , avec $1 \leq t \leq n$, la composante $a_i(t)$ est tirée suivant $Q_i(t) \in \Delta(\mathcal{A}_i)$ alors que les autres composantes $a_k(t)$ sont tirées de manière i.i.d. suivant une distribution $\mathcal{P}_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$. Le vecteur d'information $\mathbf{a}(t)$ est tiré, à l'étape t , avec la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_K | v(t)) = \left[\mathcal{P}_1 \otimes \dots \otimes Q_i(t) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}_K \right](a).$$

Si tous les joueurs choisissent leur action avec la distribution de probabilités correcte $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathcal{K}}$, alors le problème que l'on considère a été résolu par Slepian et Wolf [69] et est présenté à la section A.6. Ce type d'hypothèse sur la source n'est pas sans rappeler le codage universel [18]. La différence entre ces deux codages est liée à l'information que possède l'encodeur, à propos de la source. Pour le codage universel, la distribution de probabilités de la source n'est pas connue par l'encodeur mais reste fixe durant toute la transmission. Pour le codage de source aux variations arbitraires, la distribution de probabilités de la source n'est pas connue par l'encodeur et varie au cours de la transmission. Le schéma de codage que nous présentons ici est fiable et robuste à toute déviation unilatérale des joueurs.

Par souci de clarté, on note $\Delta(\mathcal{A}_k)$ l'ensemble des distributions de probabilités sur l'ensemble \mathcal{A}_k . Considérons une famille d'ensembles $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ et une famille de distributions $\mathcal{P}_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ pour chaque composante $k \in \mathcal{K}$. Notons $\mathcal{A} = \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_k$ le produit cartésien ; \mathcal{P} la probabilité produit défini par $\mathcal{P} = \bigotimes_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{P}_k \in \prod_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k)$ et \mathcal{P}_{-k} la probabilité produit définie par $\mathcal{P}_{-k} = \bigotimes_{j \neq k} \mathcal{P}_j \in \prod_{j \neq k} \Delta(\mathcal{A}_j)$ où la composante $k \in \mathcal{K}$ a été retirée.

4.4.2 Source d'actions aux variations arbitraires

Nous définissons les notions de code et de débit de communication atteignable pour notre source d'actions aux variations arbitraires. L'objectif est de minimiser le débit $\frac{\log M}{n}$

d'un code qui nous garantit une erreur arbitrairement faible pour toutes les suites d'états de la source. On note $v_i^n \in \Delta(\mathcal{A}_i)^n$ une suite d'états de la source qui modifie la i -ème composante de la suite de vecteurs $\mathbf{a}^n = (a_1^n, \dots, a_K^n)$. Nous considérons que le joueur J est le décodeur, mais nos résultats s'appliquent également lorsque le décodeur est un autre joueur.

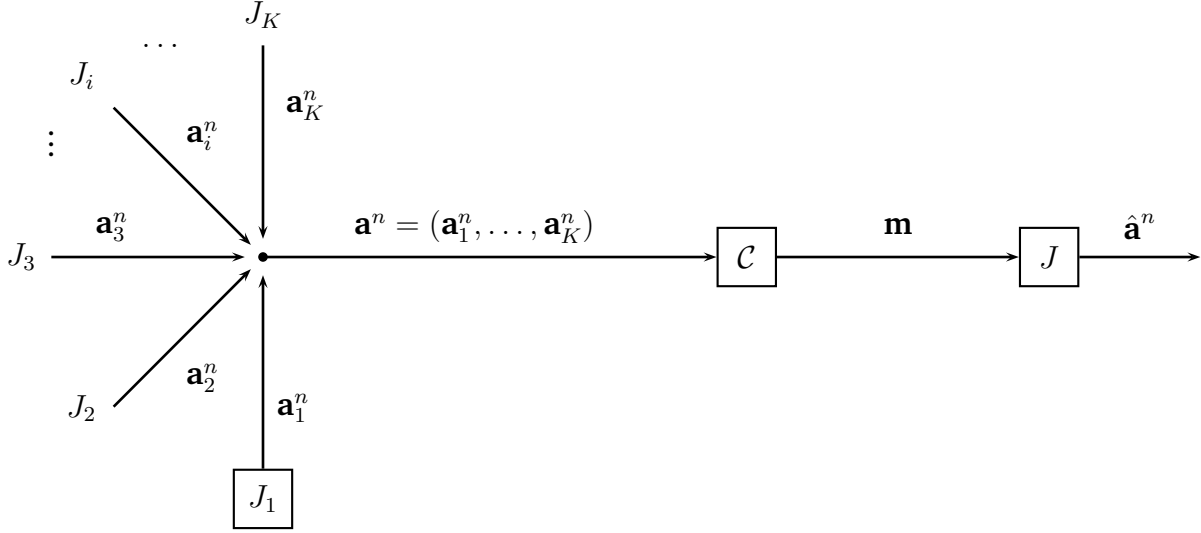


FIGURE 4.17 – L'encodeur \mathcal{C} envoie un message \mathbf{m} au joueur J afin qu'il reconstruise la suite d'actions encodée \mathbf{a}^n . Les joueurs $k \in \mathcal{K}$ peuvent changer la distribution de probabilités $\mathcal{P}_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ sur leurs actions. Le schéma du codage doit être fiable face à toutes les stratégies de déviations unilatérales des joueurs.

Définition 4.29 Un (n, M) -code est défini par un couple de fonctions :

$$f : \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (4.85)$$

$$g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}^n. \quad (4.86)$$

La probabilité d'erreur \mathcal{P}_e^n associée au (n, M) -code est définie comme suit :

$$\mathcal{P}_e^n = \max_{k \in \mathcal{K}} \max_{v_k^n \in \Delta(\mathcal{A}_k)^n} \mathcal{P}(\mathbf{a}^n \neq \hat{\mathbf{a}}^n | v_k^n). \quad (4.87)$$

La probabilité d'erreur doit être bornée supérieurement pour chaque suite $v^n \in \mathcal{V}^n = \cup_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k)^{\otimes n}$ d'états de la source.

Définition 4.30 Un débit de communication R est atteignable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un (n, M) -code tel que :

$$\frac{\log M}{n} \leq R + \varepsilon, \quad (4.88)$$

$$\mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon. \quad (4.89)$$

Le débit \mathcal{R}_s^* de la source \mathbf{a} est le minimum des débit atteignable.

Nous caractérisons le débit \mathcal{R}_s^* d'une source aux variations arbitraires. La notation H désigne l'entropie de Shannon [65] définie à la section A.1.

Théorème 4.31 (Troisième contribution) Soit $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K)$ une source d'actions aux variations arbitraires. Le débit optimal \mathcal{R}_s^* de la source est donné par l'équation suivante :

$$\mathcal{R}_s^* = \max_{k \in \mathcal{K}} \left[H(\mathbf{a}_{-k}) + \log |\mathcal{A}_k| \right]. \quad (4.90)$$

Ce théorème est publié dans [80] et sa démonstration est donnée à la section 4.4.5.1. La maximisation porte sur l'ensemble des joueurs $k \in \mathcal{K}$ et correspond à la pire configuration, lorsque le joueur qui dévie est celui dont l'indice $k \in \mathcal{K}$ réalise le maximum dans l'équation (4.90). Le débit optimal est caractérisé par l'entropie $H(\mathbf{a}_{-k})$ correspondant aux joueurs qui choisissent leur action avec la distribution correcte ainsi que l'entropie maximale $H(\mathbf{a}_k) = \log |\mathcal{A}_k|$ des actions correspondant au joueur $k \in \mathcal{K}$ qui dévie.

4.4.3 Source d'actions aux variations arbitraires avec information adjacente

Nous considérons la situation où le joueur qui décode observe une information adjacente. À chaque étape, il reçoit à travers une probabilité de transition $\mathbb{T} : \mathcal{A} \rightarrow \Delta(\mathcal{S})$, une version dégradée $s \in \mathcal{S}$ des symboles $a \in \mathcal{A}$ tirés par la source d'actions aux variations arbitraires. Nous considérons que le joueur J est le décodeur et qu'il observe les actions passées $a \in \mathcal{A}$ à travers le canal d'observation \mathbb{T} . Un encodeur \mathcal{C} envoie une information supplémentaire $m \in \mathcal{M}$ de cardinalité M minimale afin que le joueur J reconstruise la suite $a^n \in \mathcal{A}^n$ des actions passées. La figure 4.18 illustre le modèle étudié. Le codage doit être fiable pour toutes déviations unilatérales et tenir compte de l'information adjacente que reçoit le joueur qui décode. Nous caractérisons l'information pertinente que transmet la probabilité de transition \mathbb{T} , à l'aide de la théorie du coloriage de graphe.

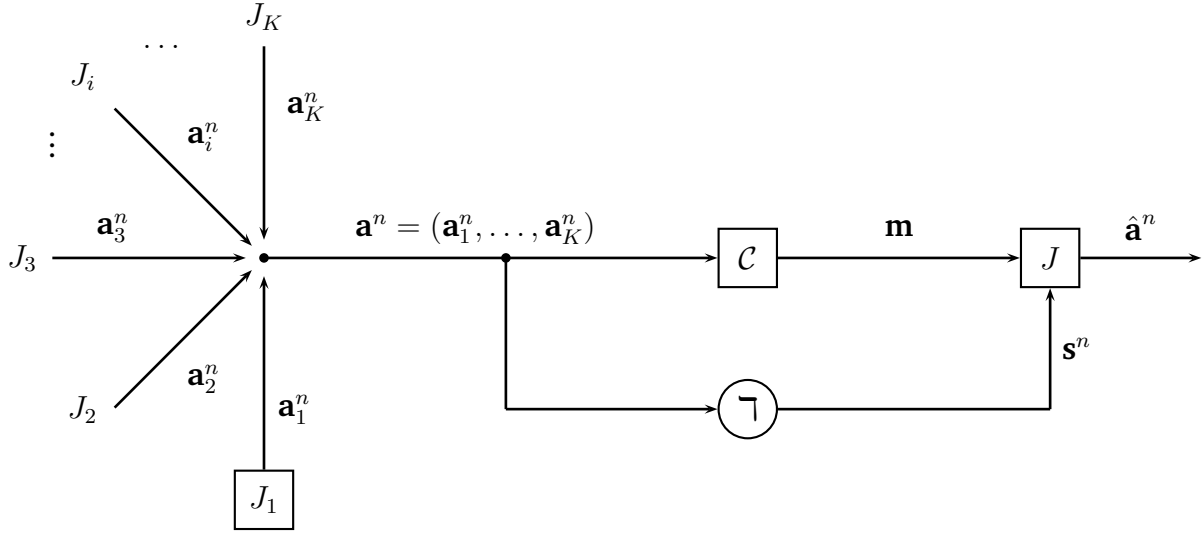


FIGURE 4.18 – Le joueur J observe une image \mathbf{s}^n du vecteur d'actions $\mathbf{a}^n = (\mathbf{a}_1^n, \dots, \mathbf{a}_K^n)$. L'encodeur \mathcal{C} envoie un message \mathbf{m} de cardinalité minimale M au joueur J afin qu'il reconstruise la suite d'actions encodée \mathbf{a}^n . Les joueurs peuvent changer la distribution de probabilités $\mathcal{P}_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ sur leurs actions. Le schéma du codage doit être fiable pour toutes les stratégies de déviations unilatérales des joueurs.

Définition 4.32 Un (n, M) -code est défini par un couple de fonctions :

$$f : \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (4.91)$$

$$g : \mathcal{M} \times \mathcal{S}^n \longrightarrow \mathcal{A}^n. \quad (4.92)$$

La probabilité d'erreur \mathcal{P}_e^n associée au (n, M) -code est définie comme suit :

$$\mathcal{P}_e^n = \max_{k \in \mathcal{K}} \max_{v_k^n \in \Delta(\mathcal{A}_k)^n} \mathcal{P}((\mathbf{a}^n, \mathbf{s}^n) \neq (\hat{\mathbf{a}}^n, \hat{\mathbf{s}}^n) | v_k^n). \quad (4.93)$$

La probabilité d'erreur doit être bornée supérieurement pour chaque suite $v^n \in \mathcal{V}^n = \cup_{k \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{A}_k)^{\otimes n}$ d'états de la source.

Définition 4.33 Un débit de communication R est atteignable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un (n, M) -code tel que :

$$\frac{\log M}{n} \leq R + \varepsilon, \quad (4.94)$$

$$\mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon. \quad (4.95)$$

Le débit \mathcal{R}_{sa}^* de la source \mathbf{a} avec information adjacente \mathbf{s} est le minimum des débits atteignable.

Nous caractérisons le débit \mathcal{R}_{sa}^* d'une source aux variations arbitraires avec information adjacente observée par le joueur J . La variation arbitraire de la source nous empêche d'utiliser un codage avec information adjacente au décodeur de type Slepian et Wolf [69]. Pour mesurer la qualité de l'information adjacente, nous introduisons le concept de coloriage d'un graphe auxiliaire. Notons a_{-k} le vecteur d'actions a privé de sa k -ème composante, \mathcal{P}_{-k} la probabilité produit $\mathcal{P}_{-k} = \bigotimes_{j \neq k} \mathcal{P}_j$ privée de sa k -ème composante et $\text{Supp } \mathcal{P}_{-k}$ le support de la distribution de probabilités \mathcal{P}_{-k} .

Définition 4.34 Pour chaque joueur $k \in \mathcal{K}$, le graphe auxiliaire $\mathcal{G}_k = (\mathcal{A}_k, E_k)$ est défini comme suit. Les actions $a_k \in \mathcal{A}_k$ du joueur $k \in \mathcal{K}$ sont les sommets du graphe. Il existe une arête $e_k = (a_k, a'_k) \in E_k$ entre deux actions $a_k \in \mathcal{A}_k$ et $a'_k \in \mathcal{A}_k$ si et seulement si :

$$\exists a_{-k} \in \text{Supp } \mathcal{P}_{-k}, \exists s \in \mathcal{S}, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \min(\Upsilon(s|a_k, a_{-k}), \Upsilon(s|a'_k, a_{-k})) \geq \delta.$$

Deux actions $a_k \in \mathcal{A}_k$ et $a'_k \in \mathcal{A}_k$ sont voisines dans le graphe \mathcal{G}_k si la probabilité d'engendrer le même signal $s \in \mathcal{S}$ à travers Υ est non-nulle.

Définition 4.35 Soit Φ_k un ensemble de couleurs. Un coloriage du graphe \mathcal{G}_k est une fonction $\phi_k : \mathcal{A}_k \longrightarrow \Phi_k$ qui satisfait :

$$\forall e_k = (a_k, a'_k) \in E_k, \text{ on a } \phi_k(a_k) \neq \phi_k(a'_k).$$

- Un coloriage minimal du graphe \mathcal{G}_k est un coloriage ϕ_k pour lequel la cardinalité de l'ensemble des couleurs Φ_k est minimale.
- Le nombre chromatique χ_k du graphe \mathcal{G}_k est la cardinalité $|\Phi_k|$ de l'ensemble des couleurs du coloriage minimal du graphe \mathcal{G}_k .

Remarque 4.36 L'information adjacente $s \in \mathcal{S}$ ainsi que la couleur $c \in \Phi_k$ du sommet $a_k \in \mathcal{A}_k$ dans le graphe \mathcal{G}_k permet au joueur qui décode de retrouver exactement le symbole $a_k \in \mathcal{A}_k$. Le codage basé sur le coloriage est totalement indépendant de la distribution de probabilités de la source d'information.

Chaque joueur contrôle, à travers ses actions, la distribution de probabilités de l'information adjacente $s \in \mathcal{S}$ reçue par le joueur qui décode. Afin d'encoder les symboles $a_{-k} \in \mathcal{A}_{-k}$, nous définissons, pour chaque symbole $a_k \in \mathcal{A}_k$, la probabilité de transition marginale Υ_{a_k} associée au symbole a_k .

$$\Upsilon_{a_k} : \mathcal{A}_{-k} \longrightarrow \Delta(\mathcal{S}) \tag{4.96}$$

$$a_{-k} \longrightarrow \Upsilon_{a_k}(s|a_{-k}) = \Upsilon(s|a_k, a_{-k}). \tag{4.97}$$

On notera \mathbf{s}_{a_k} le signal aléatoire distribué suivant la loi de probabilité induite par Υ_{a_k} .

Théorème 4.37 (Troisième contribution) Soit $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K)$ une source d'actions aux variations arbitraires et T une probabilité de transition. Le débit optimal \mathcal{R}_{sa}^* de la source est donné par l'équation suivante :

$$\mathcal{R}_{sa}^* = \max_{k \in \mathcal{K}} \left[\max_{a_k \in \mathcal{A}_k} H(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k}) + \log \chi_k \right]. \quad (4.98)$$

Ce théorème est publié dans [80] et sa démonstration est donnée à la section 4.4.5.2. Cette maximisation porte sur l'ensemble des joueurs $k \in \mathcal{K}$ et correspond à la pire configuration : lorsque le joueur qui dévie est celui dont l'indice $k \in \mathcal{K}$ réalise le maximum dans l'équation (4.98). Supposons que le joueur $k \in \mathcal{K}$ dévie en choisissant une autre suite de distributions de probabilités sur ses actions. D'après le résultat de Slepian et Wolf (section A.6), le débit optimal des actions des autres joueurs $i \in \mathcal{K} \setminus \{k\}$ dépend des actions $a_k \in \mathcal{A}_k$ choisies par le joueur $k \in \mathcal{K}$. Les suites d'actions $\mathbf{a}_{-k}^n \in \mathcal{A}_{-k}^n$ seront encodées avec le pire débit que le joueur $k \in \mathcal{K}$ puisse imposer, c'est-à-dire $\max_{a_k \in \mathcal{A}_k} H(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k})$. Les actions du joueur $k \in \mathcal{K}$ sont encodées grâce aux couleurs correspondant aux sommets du graphe auxiliaire \mathcal{G}_k . La couleur c_k et le signal s reçus par le joueur qui décode permettent de retrouver l'unique action a_k , jouée par le joueur $k \in \mathcal{K}$.

4.4.4 Exemple appliqué au jeu du contrôle de puissance

Nous illustrons les résultats des théorèmes 4.31 et 4.37 grâce à un exemple inspiré du jeu du contrôle de puissance efficace énergétiquement, introduit par [33] et étudié au chapitre 3. Nous considérons le jeu à deux joueurs où chacun possède deux actions :

- transmettre à la puissance de l'équilibre de Nash du jeu en un coup p_k^* ,
- transmettre à la puissance de coopération \tilde{p}_k .

	\tilde{p}_2	p_2^*
\tilde{p}_1	0.23, 0.23	0.10, 0.34
p_1^*	0.34, 0.10	0.15, 0.15

FIGURE 4.19 – Matrice des utilités du jeu restreint.

Les fonctions d'utilités sont données par l'équation (3.3) pour le cas où $K = M = N = 2$ et $|g_1|^2 = |g_2|^2 = \sigma^2 = 1$ représenté par la matrice 4.19. Nous considérons la situation décrite par la figure 4.21 dans laquelle la communication entre l'encodeur et les joueurs J_1 et J_2 est limitée par un canal T_0 de capacité C_0 . Les joueurs J_1 et J_2 observent, à travers T , une image \mathbf{s}^n du vecteur d'actions $\mathbf{a}^n = (\mathbf{a}_1^n, \mathbf{a}_2^n)$. L'encodeur \mathcal{C} transmet à travers un

canal T_0 , la suite d'actions encodée \mathbf{a}^n , à destination des joueurs J_1 et J_2 . La capacité du canal T_0 est fixée arbitrairement à 1.7 bit par seconde. Les joueurs choisissent leur action avec une probabilité indépendante $\mathcal{P}_1 \in \Delta(\{\tilde{p}_1, p_1^*\})$ et $\mathcal{P}_2 \in \Delta(\{\tilde{p}_2, p_2^*\})$. Le canal d'ob-

$$\mathsf{T}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) =$$

$1 - \frac{3}{4}\varepsilon$ $s_{\tilde{p}_1\tilde{p}_2}$	$\frac{1}{4}\varepsilon$ $s_{\tilde{p}_1p_2^*}$
$\frac{1}{4}\varepsilon$ $s_{p_1^*\tilde{p}_2}$	$\frac{1}{4}\varepsilon$ $s_{p_1^*p_2^*}$

FIGURE 4.20 – Lorsque le couple d'actions (puissances d'émission) $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ est joué, le canal d'observation T induit une probabilité sur les signaux $\mathcal{S} = \{s_{\tilde{p}_1\tilde{p}_2}, s_{\tilde{p}_1p_2^*}, s_{p_1^*\tilde{p}_2}, s_{p_1^*p_2^*}\}$ décrite par ce tableau. Cette distribution est définie de manière symétrique lorsque les autres couples d'actions $\{(\tilde{p}_1, p_2^*), (p_1^*, \tilde{p}_2), (p_1^*, p_2^*)\}$ sont joués.

servation T que nous considérons fait correspondre un signal différent à chaque couple d'actions. L'ensemble des actions est $\mathcal{A} = \{(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2), (\tilde{p}_1, p_2^*), (p_1^*, \tilde{p}_2), (p_1^*, p_2^*)\}$ et l'ensemble des signaux est $\mathcal{S} = \{s_{\tilde{p}_1\tilde{p}_2}, s_{\tilde{p}_1p_2^*}, s_{p_1^*\tilde{p}_2}, s_{p_1^*p_2^*}\}$. Plus précisément, les joueurs J_1 et J_2 observent le signal $s_{p_1p_2}$ qui correspond à l'action jouée (p_1, p_2) , avec une probabilité $1 - \frac{3}{4}\varepsilon$. Par exemple, lorsque l'action jouée est $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, la distribution de probabilités induite sur ces signaux $s \in \mathcal{S}$ est décrite par la figure 4.20. Lorsque $\varepsilon = 1$, le canal d'observation T ne transmet aucune information aux joueurs J_1 et J_2 . À l'inverse, lorsque $\varepsilon = 0$, le canal d'observation T transmet sans erreur, l'action choisie. Le paramètre ε permet de comparer la situation dans laquelle l'observation des joueurs est parfaite, nulle ou intermédiaire.

Nous cherchons à caractériser les sources d'actions, notées $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, que l'encodeur peut envoyer aux joueurs à travers le canal T_0 . Le théorème de séparation de Shannon [65], présenté à la section A.5 énonce que la source d'action $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ peut être transmise à travers un canal T_0 de capacité $C_0 = 1.7$ si et seulement si $\mathcal{R}_{sa}^* \leq C_0$. Grâce aux théorèmes 4.31 et 4.37, nous caractérisons les distributions sur les actions $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ pour lesquelles le débit optimal \mathcal{R}_{sa}^* est inférieur à la capacité C_0 . Lorsque cette condition est satisfaite, les joueurs peuvent reconstruire l'observation parfaite des suites d'actions passées. Dans ce cas, le théorème Folk, présenté à la section 2.4 caractérise l'ensemble des utilités d'équilibre. À l'inverse, si la condition $\mathcal{R}_{sa}^* \leq C_0$ n'est pas satisfaite, l'observation parfaite des actions passées ne peut pas être reconstruite pour les joueurs J_1 et J_2 . Dans ce cas, aucun résultat général ne garantit une condition d'équilibre. L'utilité $u = (u_1, u_2)$, dont la distribution de probabilités $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ ne satisfait pas la contrainte de capacité, n'est donc pas nécessairement une utilité d'équilibre. Nous illustrons la région des utilités d'équilibre pour lesquelles le débit de la source d'action \mathbf{a} est inférieur à une

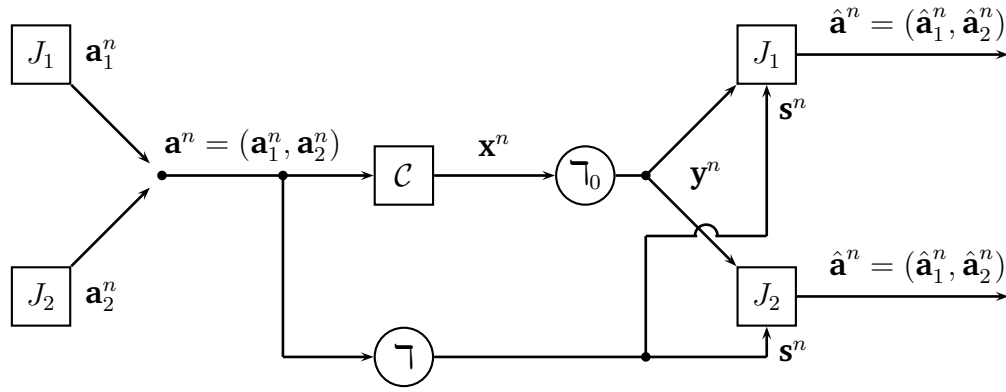


FIGURE 4.21 – Les joueurs J_1 et J_2 observent, à travers Υ , une image \mathbf{s}^n du vecteur d’actions $\mathbf{a}^n = (\mathbf{a}_1^n, \dots, \mathbf{a}_K^n)$. L’encodeur \mathcal{C} transmet, à travers un canal Υ_0 , la suite d’actions encodée \mathbf{a}^n , à destination des joueurs J_1 et J_2 . Les joueurs retrouvent la suite des actions passées $\hat{\mathbf{a}}^n = \mathbf{a}^n$ avec une erreur arbitrairement faible si et seulement si le débit \mathcal{R}_{sa}^* de la source est inférieur à la capacité C_0 du canal Υ_0 , fixée à 1.7 bit par seconde.

capacité fixée arbitrairement à $C_0 = 1,7$ bits par seconde. Les figures 4.22, 4.23 et 4.24 décrivent la région des utilités d’équilibre lorsque les joueurs J_1 et J_2 observent un signal adjacent à travers Υ pour ε valant respectivement 1, 0 et 0.5.

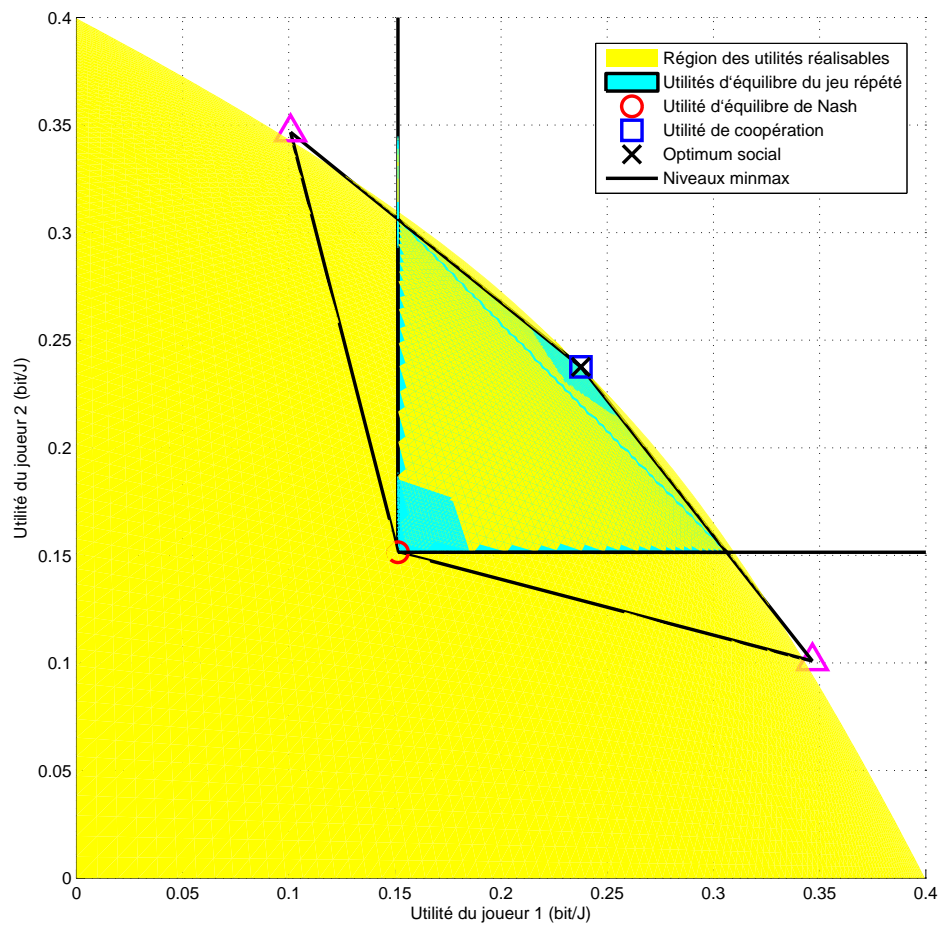


FIGURE 4.22 – Région des utilités du jeu répété qui satisfait les conditions du théorème Folk ainsi que la contrainte de communication $\mathcal{R}^* \leq C = 1.7$ lorsque $\varepsilon = 1$.

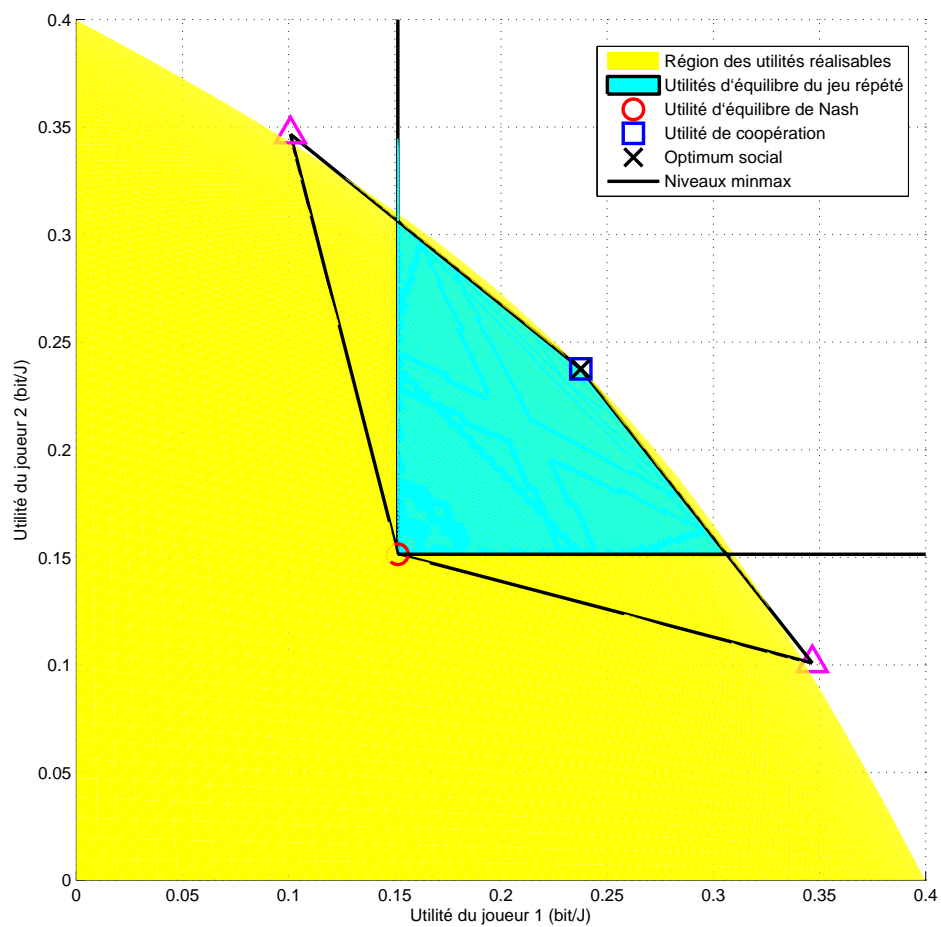


FIGURE 4.23 – Région des utilités du jeu répété qui satisfont les conditions du théorème Folk ainsi que la contrainte de communication $\mathcal{R}^* \leq C = 1.7$ lorsque $\varepsilon = 0$.

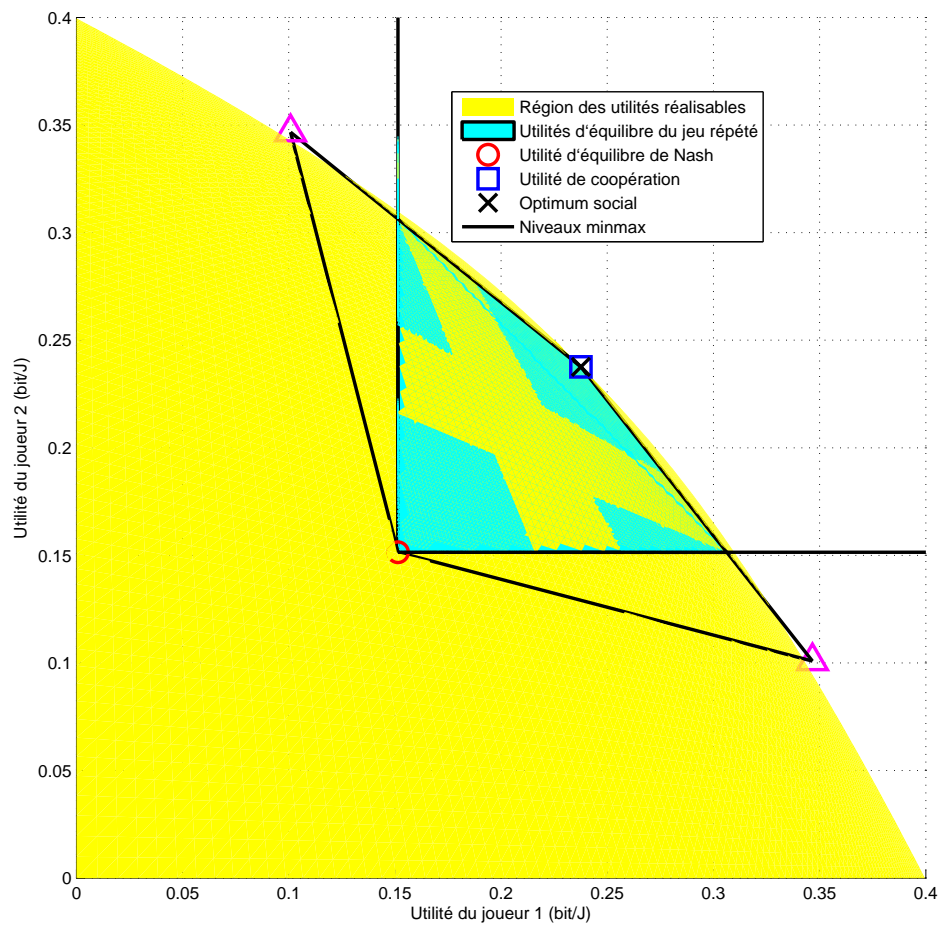


FIGURE 4.24 – Région des utilités du jeu répété qui satisfait les conditions du théorème Folk ainsi que la contrainte de communication $\mathcal{R}^* \leq C = 1.7$ lorsque $\varepsilon = 0.5$.

4.4.5 Démonstrations

4.4.5.1 Démonstration du théorème 4.31

Atteignabilité. L'encodeur utilise un test statistique sur les suites d'actions des joueurs afin de détecter un éventuel déviateur. Lorsqu'un joueur dévie, en changeant la distribution sur ses actions, sa suite d'actions est envoyée sans codage. Les actions des autres joueurs sont encodées grâce au codage de source de Shannon qui utilise les suites typiques introduites par la définition A.10. Considérons le schéma de codage suivant.

- La fonction d'encodage $f : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{M}$ est définie en plusieurs étapes. Tout d'abord, elle évalue le test statistique défini par l'équation (4.99). Ce test renvoie un ensemble des joueurs dont les suites d'actions sont les moins typiques. À chaque joueur correspond un livre de code. Soit $a^n = (a_1^n, \dots, a_K^n)$ la suite d'actions jouées, choisissons un joueur $k \in \mathcal{K}$ dont le test statistique est positif.

$$\arg \min_{k \in \mathcal{K}} \sum_{a_{-k} \in \mathcal{A}_{-k}} \left| \frac{N(a_{-k} | a_{-k}^n)}{n} - \mathcal{P}_{-k}(a_{-k}) \right|. \quad (4.99)$$

Premièrement, la fonction f encode l'index $k \in \mathcal{K}$ du joueur choisi par le test statistique (4.99).

Deuxièmement, la fonction f encode la suite de actions $a_k^n \in \mathcal{A}_k^n$ du joueur $k \in \mathcal{K}$ en utilisant $|\mathcal{A}_k^n|$ messages.

Troisièmement, la fonction f encode les suites d'actions $a_{-k}^n \in \mathcal{A}_{-k}^n$ en utilisant l'ensemble des suites typiques $A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A}_{-k})$ défini par la définition A.10. Si la suite a_{-k}^n appartient à l'ensemble typique $A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A}_{-k})$, alors l'encodeur envoie l'index $m \in A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A}_{-k})$ de la suite au joueur qui décode. Si la suite n'est pas typique, une erreur est déclarée.

L'ensemble des messages envoyés par l'encodeur \mathcal{C} au joueur J est de cardinalité $M = |K| \cdot |\mathcal{A}_k|^n \cdot |A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A}_{-k})|$.

- La fonction de décodage $g : \mathcal{M} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}^n$ associe l'index $m \in \mathcal{M}$ au vecteur de suites d'actions typiques $a^n \in \mathcal{A}^n$ correspondantes.

Remarque 4.38 Puisque le joueur qui décode connaît l'index du joueur $k \in \mathcal{K}$, il peut utiliser le livre de code approprié.

Le débit du code. D'après le lemme A.12, pour tout ε , il existe $\bar{n}_1 \in \mathbb{N}$ et une constante $c \in \mathbb{R}$ tel que,

$$\forall n \geq \bar{n}_1, \quad |A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A}_{-k})| \leq 2^{n(H(\mathbf{a}_{-k}) + c\varepsilon)}. \quad (4.100)$$

$$(4.101)$$

L'index du joueur $k \in \mathcal{K}$ choisi par le test statistique (4.99) est transmis au début de la communication et ne perturbe pas le débit asymptotique. Le débit du code est borné par

la quantité suivante :

$$\frac{\log M}{n} \leq \max_{k \in \mathcal{K}} \left[H(\mathbf{a}_{-k}) + \log |\mathcal{A}_k| \right] + \varepsilon = H + \varepsilon. \quad (4.102)$$

La probabilité d'erreur. Supposons qu'un joueur $k \in \mathcal{K}$ dévie en choisissant ses actions de manière arbitraire suivant $v_k^n \in \Delta(\mathcal{A}_k)^{\otimes n}$. Il existe deux possibilités, soit le test statistique (4.99) renvoie le joueur $k \in \mathcal{K}$ soit le test statistique renvoie un autre joueur $J_j \neq J_k$.

Supposons que le joueur $k \in \mathcal{K}$ qui a dévié, soit choisi par le test statistique (4.99). La suite des actions du joueur $k \in \mathcal{K}$ est directement envoyée et retrouvée sans erreur par le joueur qui décode. Puisque nous considérons les déviations unilatérales des joueurs, les autres joueurs choisissent leurs suites d'actions avec la distribution de probabilités $\mathcal{P}_{-k} \in \prod_{j \neq k} \Delta(\mathcal{A}_j)$. D'après le lemme A.12, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe \bar{n}_2 tel que $\forall n \geq \bar{n}_2$, $\mathbb{P}(a \in \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A})) \geq 1 - \varepsilon$. La probabilité d'erreur s'écrit :

$$\mathcal{P}_e^n = \mathbb{P}(\mathbf{a}^n \neq g(f(\mathbf{a}^n))) = \mathbb{P}(\mathbf{a}_{-k}^n \notin \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A}_{-k})) \quad (4.103)$$

$$\leq \mathbb{P}(\mathbf{a}^n \notin \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A})) \leq \varepsilon. \quad (4.104)$$

La dernière inégalité vient de l'implication $(x^n, y^n) \in \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \implies x^n \in \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X})$ et $y^n \in \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{Y})$, et donc $\mathbb{P}((x^n, y^n) \notin \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) \geq \max(\mathbb{P}(x^n \notin \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X})), \mathbb{P}(y^n \notin \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{Y})))$.

Supposons qu'un autre joueur $J_j \neq J_k$ n'ayant pas dévié, soit choisi par le test statistique (4.99). Dans ce cas, la suite des vecteurs d'actions $a^n = (a_1^n, \dots, a_K^n)$ satisfait,

$$\sum_{a_{-j} \in \mathcal{A}_{-j}} \left| \frac{N(a_{-j}|a_{-j}^n)}{n} - \mathcal{P}_{-j}(a_{-j}) \right| \leq \sum_{a_{-k} \in \mathcal{A}_{-k}} \left| \frac{N(a_{-k}|a_{-k}^n)}{n} - \mathcal{P}_{-k}(a_{-k}) \right|. \quad (4.105)$$

D'après le lemme des suites typiques A.12, la suite a_{-k}^n est typique avec une grande probabilité. La probabilité d'erreur du codage s'écrit :

$$\mathcal{P}_e^n = \mathbb{P}(\mathbf{a}^n \neq g(f(\mathbf{a}^n))) = \mathbb{P}(\mathbf{a}_{-j}^n \notin \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A}_{-j})) \quad (4.106)$$

$$\leq \mathbb{P}(\mathbf{a}_{-k}^n \notin \mathcal{A}_\varepsilon^{n*}(\mathcal{A}_{-k})) \leq \varepsilon. \quad (4.107)$$

Nous avons borné la probabilité d'erreur pour toutes les suites $v^n \in \mathcal{V}^n$ d'états de la source. Ceci démontre le résultat d'atteignabilité.

Réciproque. Supposons que :

$$\mathcal{R}_s^* < \max_{k \in \mathcal{K}} \left[H(\mathbf{a}_{-k}) + \log |\mathcal{A}_k| \right], \quad (4.108)$$

et que le maximum dans (4.108) soit atteint pour le joueur $k \in \mathcal{K}$. Considérons l'état de la source $v_k^n \in \mathcal{V}^n$ pour lequel le joueur $k \in \mathcal{K}$ choisit ses actions avec la distribution

de probabilités uniforme $\mathcal{Q}_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ sur son espace d'actions \mathcal{A}_k . Les autres joueurs choisissent leur action avec la probabilité correcte $\mathcal{P}_{-k} \in \Delta(\mathcal{A}_{-k})$. Le résultat de codage de source de Shannon [65], présenté à la section A.3 caractérise le débit minimal $H(\mathbf{a})$ pour la source décrite ci-dessus.

$$H(\mathbf{a}) = H(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{-k}) = H(\mathbf{a}_k) + H(\mathbf{a}_{-k}) = \max_{k \in \mathcal{K}} \left[H(\mathbf{a}_{-k}) + \log |\mathcal{A}_k| \right]. \quad (4.109)$$

D'après [65], un débit R est atteignable si et seulement si $R \geq H(\mathbf{a})$. Puisque \mathcal{R}_s^* est inférieur à la borne limite du théorème de Shannon, alors pour tout code, la probabilité d'erreur ne tend pas vers zéro. Ceci contredit le fait que \mathcal{R}_s^* soit un débit atteignable.

4.4.5.2 Démonstration du théorème 4.37

Atteignabilité. Nous construisons un codage basé sur le coloriage des graphes et les tests statistiques. Deux points sont à considérer avec attention. Tout d'abord, il est possible que l'information adjacente s^n fournisse une information pertinente au joueur J qui décode, même lorsqu'un autre joueur dévie. Ensuite, la probabilité de transition \mathbb{T} qui génère l'information adjacente est contrôlée par les symboles $a_k \in \mathcal{A}_k$ de chaque composante $k \in \mathcal{K}$.

Caractérisons la fonction d'encodage f . L'encodeur procède au même test statistique (4.99) que dans la section 4.4.5.1 en calculant, pour une suite d'actions $a^n = (a_1^n, \dots, a_K^n)$, l'ensemble suivant :

$$\arg \min_{k \in \mathcal{K}} \sum_{a_{-k} \in \mathcal{A}_{-k}} \left| \frac{N(a_{-k} | a_k^n)}{n} - \mathcal{P}_{-k}(a_{-k}) \right|, \quad (4.110)$$

et choisit une composante $k \in \mathcal{K}$ qui minimise l'équation (4.110). Les symboles de la composante $k \in \mathcal{K}$ vont être encodés en utilisant le coloriage du graphe \mathcal{G}_k correspondant.

- encoder l'index de la composante choisie $k \in \mathcal{K}$ en utilisant $|K|$ messages.
- encoder la suite des couleurs c_k^n qui correspond à la suite d'actions a_k^n avec à chaque étape $c_k = \phi_k(a_k)$ en utilisant un encodage avec χ_k^n messages.

Les autres composantes a_{-k}^n seront encodées en fonction de la probabilité de transition \mathbb{T} et de la suite a_k^n . Par exemple, si le symbole a_k a été souvent utilisé, la suite des signaux $s_{a_k}^n$, tirée selon la probabilité \mathbb{T}_{a_k} , est suffisamment longue pour utiliser un codage de source avec information adjacente de type Slepian and Wolf [69] (voir section A.6. Dans le cas contraire, l'information a_{-k} doit être encodée directement, sans aucune compression. L'encodeur divise la suite s^n en une partition $(s_{a_k}^n)_{a_k \in \mathcal{A}_k}$ indexée par les symboles $a_k \in \mathcal{A}_k$ correspondant à la transition \mathbb{T}_{a_k} . Notons $n_{a_k} = N(a_k | a_k^n)$ et $s_{a_k}^{n_{a_k}}$ la

sous-suite d'informations adjacentes de longueur n_{a_k} tirée avec \mathbb{T}_{a_k} . L'encodeur calcule la partition $(\tilde{\mathcal{A}}_k, \tilde{\mathcal{A}}_k^c)$ des symboles de l'ensemble $a_k \in \mathcal{A}_k$. Pour chaque ε , il existe un \bar{n}_1 tel que la probabilité d'erreur du codage de Slepian et Wolf soit bornée par ε .

- Si $N(a_k|a_k^n) = n_{a_k} \leq \bar{n}_1$, alors $a_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k$ et la suite a_{-k}^n est encodée avec $|A_{-k}|^n$ messages.
- Si $N(a_k|a_k^n) = n_{a_k} > \bar{n}_1$, alors $a_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k^c$ et chaque suite a_{-k}^n est encodée en utilisant la technique du "binning aléatoire" de Slepian et Wolf [69]. Les $2^{n_{a_k}(H(\mathbf{a}_{-k})+2\varepsilon)}$ suites typiques a_{-k}^n sont affectées de manière aléatoire dans l'un des $2^{n_{a_k}(H(\mathbf{a}_{-k}|\mathbf{s}_{a_k})+3\varepsilon)}$ correspondant à autant de messages $M_{a_k} = 2^{n_{a_k}(H(\mathbf{a}_{-k}|\mathbf{s}_{a_k})+2\varepsilon)}$. Chaque paquet contient donc $2^{n_{a_k}(I(\mathbf{a}_{-k};\mathbf{s}_{a_k})-\varepsilon)}$ suites typiques a_{-k}^n . L'encodeur observe une suite de réalisations a_{-k}^n . Lorsque cette suite est typique il envoie l'indice $m_{a_k} \in \mathcal{M}_{a_k}$ du paquet contenant la suite a_{-k}^n . Sinon, l'encodeur déclare une erreur.

L'ensemble des messages \mathcal{M} d'un tel schéma de codage est de cardinalité :

$$M = |K| \cdot \chi_k^n \cdot |A_{-k}|^{\sum_{a_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k} n_{a_k}} \cdot \prod_{a_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k^c} 2^{n_{a_k}(H(\mathbf{a}_{-k}|\mathbf{s}_{a_k})+2\varepsilon)}. \quad (4.111)$$

Caractérisons la fonction de décodage g . Le joueur qui décode reçoit l'index $k \in \mathcal{K}$ du joueur choisi par le test statistique (4.99). Grâce au livre de code approprié, il décode séparément les informations concernant la composante $k \in \mathcal{K}$ des autres composantes $j \in \mathcal{K} \setminus \{k\}$.

- Connaissant la composante $k \in \mathcal{K}$ choisie lors des tests statistiques, l'information adjacente $s \in \mathcal{S}$ et la couleur $c_k \in \chi_k$, le joueur qui décode caractérise un unique symbole d'étape $a_k \in \mathcal{A}_k$ pour la composante $k \in \mathcal{K}$.

Le joueur qui décode et l'encodeur connaissent donc l'entière suite d'actions $a_k^n \in \mathcal{A}_k^n$. Le joueur qui décode caractérise la partition $\tilde{\mathcal{A}}_k$ et $\tilde{\mathcal{A}}_k^c$ de l'ensemble des symboles \mathcal{A}_k .

- Pour la transition \mathbb{T}_{a_k} , contrôlée par le symbole $a_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k$, la suite de symboles $a_{-k}^{n_{a_k}}$ est décodée directement.
- Pour la transition \mathbb{T}_{a_k} , contrôlée par le symbole $a_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k^c$, la suite d'actions $a_{-k}^{n_{a_k}}$ est décodée grâce à la technique de Slepian et Wolf [69]. Le joueur qui décode cherche dans le paquet $m_{a_k} \in \mathcal{M}_{a_k}$, une suite a_{-k}^n qui soit conjointement typique avec la suite des informations adjacentes $s_{a_k}^n$ pour la distribution de probabilités $\mathcal{P}_{-k} \otimes \mathbb{T}_{a_k} \in \Delta(\mathcal{A}_{-k} \times \mathcal{S})$.

Évaluons le débit du code. Soit $\bar{n}_2 > \frac{\log |K| + \bar{n}_1 |\mathcal{A}_k| \log |A_{-k}|}{\varepsilon}$. Nous montrons que pour tout $n \geq \bar{n}_2$, le débit du code est borné par la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\log M}{n} &= \frac{\log \left(|\mathcal{K}| \cdot \chi_k^n \cdot |\mathcal{A}_{-k}|^{\sum_{a_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k} n_{a_k}} \cdot \prod_{a_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k^c} 2^{n_{a_k} (H(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k}) + 2\varepsilon)} \right)}{n} \\
&\leq \frac{\log |\mathcal{K}|}{n} + \log \chi_k + \frac{\bar{n}_1 |\tilde{\mathcal{A}}_k|}{n} \log |\mathcal{A}_{-k}| + \sum_{a_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k^c} \frac{n_{a_k}}{n} (H(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k}) + 2\varepsilon) \\
&\leq \max_{a_k \in \mathcal{A}_k} \left[H(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k}) + \log \chi_k \right] + \frac{\log |\mathcal{K}| + \bar{n}_1 |\mathcal{A}_k| \log |\mathcal{A}_{-k}|}{n} + 2\varepsilon \\
&\leq \max_{k \in \mathcal{K}} \left[\max_{a_k \in \mathcal{A}_k} H(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k}) + \log \chi_k \right] + 3\varepsilon \\
&= \mathcal{R}_{sa}^* + 3\varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Évaluons la probabilité d'erreur. Supposons que le joueur $k \in \mathcal{K}$ choisisse ses suites d'actions a_k^n selon une suite de distributions arbitraire. Il existe deux possibilités : soit le test statistique (4.99) renvoie le joueur $k \in \mathcal{K}$ qui a dévié, soit le test statistique renvoie un autre joueur $J_j \neq J_k$.

- Supposons que l'encodeur choisisse la composante $k \in \mathcal{K}$ lors des tests statistiques. Dans ce cas, la technique du "binning aléatoire" de Slepian et Wolf [69] garantit que la suite des vecteurs d'actions a_{-k}^n est reconstruite parfaitement avec une grande probabilité. En effet, définissons les événements d'erreur suivants :
 - $\mathcal{E}_1 = \{a_{-k}^n \notin A_{\varepsilon}^{*n}(\mathcal{A}_{-k})\}$ la suite d'actions a_{-k}^n n'est pas typique.
 - $\mathcal{E}_2 = \{\exists a_{-k}^n \neq a'_{-k} \in m_{a_k}, (a'_{-k}, s_{a_k}^n) \notin A_{\varepsilon}^{*n}(\mathcal{A}_{-k} \times \mathcal{S})\}$ il existe une autre suite a'_{-k} dans le paquet m_{a_k} qui est conjointement typique avec $s_{a_k}^n$.
D'après les lemmes A.12 et A.14, les probabilités d'erreur suivantes $\mathcal{P}(\mathcal{E}_1)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{E}_2)$ sont inférieures à $\varepsilon > 0$ dès que n est suffisamment grand.
- Supposons que l'encodeur choisisse, lors des tests statistiques, une autre composante $J_j \neq J_k \in \mathcal{K}$. Cela implique l'inégalité suivante :

$$\sum_{a_{-j} \in \mathcal{A}_{-j}} \left| \frac{N(a_{-j} | a_{-j}^n)}{n} - \mathcal{P}_{-j}(a_{-j}) \right| \leq \sum_{a_{-k} \in \mathcal{A}_{-k}} \left| \frac{N(a_{-k} | a_{-k}^n)}{n} - \mathcal{P}_{-k}(a_{-k}) \right|. \tag{4.113}$$

Pour tous les joueurs $i \in \mathcal{K} \setminus \{k\}$, la suite a_i^n est tirée indépendamment et identiquement distribuée d'étape en étape avec la distribution $\mathcal{P}_i \in \Delta(\mathcal{A}_i)$. D'après le lemme A.12, ces suites d'actions sont typiques avec une grande probabilité lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, la suite de la composante a_k^n est typique avec une grande probabilité et donc correctement encodée et décodée. Il existe donc un n suffisamment grand tel que la probabilité d'erreur soit bornée par ε .

Réciproque. Pour montrer la réciproque, nous supposons que le débit optimal \mathcal{R}_{sa}^* soit inférieur à la quantité suivante :

$$\mathcal{R}_{sa}^* < \max_{k \in \mathcal{K}} \left[\max_{a_k \in \mathcal{A}_k} H(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k}) + \log \chi_k \right]. \quad (4.114)$$

Supposons que le maximum soit atteint pour la composante $k \in \mathcal{K}$ et le symbole $\bar{a}_k \in \mathcal{A}_k$. La distribution de probabilités sur les actions $a = (a_1, \dots, a_K)$ est le produit des distributions marginales sur chaque composante $a_k \in \mathcal{A}_k$, avec $k \in \mathcal{K}$. Le débit optimal \mathcal{R}_{sa}^* s'écrit donc comme la somme des débits des composantes $\mathcal{R}_{sa}^* = \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{R}_k^*$. La réciproque est divisée en deux parties.

Tout d'abord, supposons que le schéma de codage ait un débit $\mathcal{R}_k^* < \log \chi_k$. Par la propriété du coloriage minimal, la même couleur c_k peut être générée par deux actions différentes $\tilde{a}_k \in \mathcal{A}_k$ et $\tilde{a}_k' \in \mathcal{A}_k$. La probabilité d'erreur tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

$$\begin{aligned} & \exists \tilde{a}_k, \tilde{a}_k', \exists a_{-k} \in \text{Supp } \mathcal{P}_{-k}, \exists s \in \mathcal{S}, \exists \delta > 0, \min(\mathbb{I}(s | a_k, a_{-k}), \mathbb{I}(s | a_k', a_{-k})) \geq \delta \\ \implies & \forall (f, g), \mathcal{P}_e^n > \sum_{t=1}^n \delta^2 (1 - \delta^2)^{t-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

Il existe une suite d'états de la source $v_k^n \in \mathcal{V}^n$ telle que les symboles $\tilde{a}_k \in \mathcal{A}_k$ et $\tilde{a}_k' \in \mathcal{A}_k$ ne puissent être distingués par le joueur qui décode. Pour une telle suite, la procédure de codage induit une erreur qui tend vers 1.

Ensuite, supposons que la suite a_k^n soit parfaitement reconstruite par le joueur qui décode mais que le débit de la suite a_{-k}^n soit :

$$\mathcal{R}_{-k}^* < H_{v_{\bar{a}_k}}(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k}) = \max_{a_k \in \mathcal{A}_k} H(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k}). \quad (4.115)$$

Dans ce cas, le résultat de Slepian et Wolf [69] (section A.6) nous assure que la probabilité d'erreur tend vers 1 lorsque la suite d'états $v_k^n = \bar{a}_k^n$ et que n tend vers l'infini. Ceci contredit l'hypothèse que le débit suivant est atteignable.

$$\mathcal{R}_{sa}^* = \mathcal{R}_{-k}^* + \mathcal{R}_k^* < \max_{a_k \in \mathcal{A}_k} H(\mathbf{a}_{-k} | \mathbf{s}_{a_k}) + \log \chi_k. \quad (4.116)$$

4.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre est consacré à la reconstruction d'une structure d'observation dans un jeu répété avec observation imparfaite. Un encodeur \mathcal{C} envoie aux joueurs un signal supplémentaire qui complète les signaux privés $s_k \in \mathcal{S}_k$ reçus par les joueurs $k \in \mathcal{K}$ à

chaque étape. Afin de satisfaire les contraintes de transmission d'information, le débit du signal supplémentaire doit être minimal. Ce signal et les signaux privés permettent aux joueurs d'observer les actions choisies aux étapes précédentes de manière plus précise. La reconstruction d'une structure d'observation a pour objectif de caractériser la région des utilités d'équilibre. Si une utilité u n'appartient pas à cette région, alors aucune stratégie dont l'utilité de long terme est u n'est une stratégie d'équilibre.

Trois situations ont été envisagées. La première situation, étudiée dans la section 4.2, consiste à envoyer, à chaque étape, un signal supplémentaire au joueur afin que ce dernier distingue les actions choisies à l'étape précédente. Dans la seconde situation, section 4.3, l'encodeur envoie un signal supplémentaire afin que le joueur distingue le vecteur d'actions choisi précédemment avec une probabilité d'erreur inférieure à un paramètre $\varepsilon > 0$. Dans la troisième situation, section 4.4, l'encodeur observe la réalisation d'une suite d'actions, qu'il transmet au joueur. Cette étude asymptotique nous permet de donner le taux de compression optimale qu'un encodeur peut réaliser à partir des suites d'actions choisies par des joueurs.

Le problème général étudié dans ce chapitre est celui de la transformation d'une structure d'observation en une autre structure d'observation pour laquelle la région des utilités d'équilibre est caractérisée. Une première difficulté consiste à choisir la structure d'observation qui soit la plus proche de celle des joueurs et pour laquelle une caractérisation existe. Lorsque la nouvelle structure d'observation est choisie, une seconde difficulté est de s'assurer que les joueurs ne possèdent pas trop d'informations par rapport à ce qu'ils devraient. Ce détail pourrait remettre en cause la condition d'équilibre. Une

LA RECONSTRUCTION D'UNE STRUCTURE D'OBSERVATION FAIT INTERVENIR DES OUTILS DU CODAGE CANAL SANS ERREUR ET DES SOURCES D'INFORMATION AUX VARIATIONS ARBITRAIRES.

troisième difficulté réside dans le choix d'une reconstruction de long terme ou de court terme. Dans ce chapitre, les probabilités sur les suites d'actions ne sont pas prises en compte pour la reconstruction de court terme mais elles sont supposées indépendantes et identiquement distribuées pour la reconstruction asymptotique. Existe-t-il une durée de reconstruction optimale dépendant des probabilités sur les suites d'actions induites par la stratégie d'équilibre ? Cette durée de la reconstruction, permet-elle aux joueurs de mettre en œuvre la stratégie d'équilibre ? Nous proposons plusieurs extensions à ce travail.

- La théorie de l'information pour les communications en un coup et sans erreur pourrait permettre de reconstruire d'autres structures d'observation. Les résultats de codage de sources, de canal et de réseau peuvent s'étendre aux communications en un coup à l'aide du coloriage de graphe. En particulier, l'étude du canal sur écoute [85] nous permettrait d'étendre nos résultats à la reconstruction en un coup d'une autre structure d'observation, non-nécessairement parfaite. En effet le canal sur écoute pourrait nous garantir une condition de confidentialité

nécessaire à la reconstruction d'une structure d'observation non-parfaite.

- Les méthodes des spectres d'information [38] pourraient également apporter des résultats intéressants concernant la reconstruction asymptotique. Lorsque les suites des actions des joueurs ne sont pas tirées avec une distribution de probabilités i.i.d. d'étape en étape, nous pourrions caractériser un débit d'information minimal ou maximal.
- Le problème CEO [15] pourrait, quant à lui, enrichir nos intuitions puisqu'il consiste à estimer les paramètres d'un problème pour lequel les observations sont générées par des canaux gaussiens.

Chapitre 5

Canal multi-utilisateur et théorème Folk avec observation imparfaite

5.1 Description et résultats principaux

Le théorème Folk, présenté au chapitre 2, caractérise les utilités d'équilibre pour un jeu répété de long terme lorsque les joueurs observent parfaitement les actions passées. Aucun résultat de ce genre n'existe lorsque les observations sont imparfaites, que les actions sont observées à travers un canal de communication. La difficulté principale est de déterminer les corrélations sur les suites d'actions, que les joueurs peuvent mettre en œuvre grâce à leurs signaux privés. En effet, à une structure d'observation fixée \mathcal{I} , correspond un ensemble de distributions corrélées que les joueurs peuvent générer sur les suites d'actions. Plus particulièrement, un groupe de joueurs peut utiliser les signaux privés afin de coordonner la punition d'un autre joueur. La caractérisation des niveaux de punition du jeu répété est un problème ouvert qui contient plusieurs problèmes de théorie de Shannon non-résolus. Ceci nous empêche d'obtenir une caractérisation générale des utilités d'équilibre des jeux répétés avec observation imparfaite. Les outils de la théorie de Shannon ont d'abord été introduits dans les jeux répétés avec complexité bornée par [55] et [56]. Ces méthodes ont ensuite été adaptées, dans [37], au problème des jeux répétés à somme nulle lorsqu'un joueur est contraint à jouer en stratégies pures et observe la réalisation d'une suite de variables aléatoires. Dans [57], les auteurs considèrent un jeu répété avec information incomplète d'un côté où l'état de la nature varie à chaque étape. La notion d'entropie permet de caractériser le compromis optimal entre la transmission des futurs états de la nature et l'exploitation de ces connaissances. Le résultat de [36] est pionnier en ce qui concerne la caractérisation des niveaux min-max d'un jeu répété avec observation imparfaite. Dans cet article, un groupe de joueurs, qui observe parfaitement les actions passées, se coordonne afin de punir un autre joueur à son niveau min-max. Ce résultat est basé sur un théorème de codage présenté dans [35]. La caractérisation explicite des niveaux min-max pour un jeu à trois joueurs, cha-

cun ayant deux actions, apparaît dans [34]. Nous avons choisi d’approfondir l’étude des niveaux min-max du jeu répété et des distributions corrélées qu’un groupe de joueurs peut mettre en œuvre face à un autre joueur.

D’une part, la théorie de l’information pour les réseaux permet de déterminer les corrélations réalisables entre les suites de symboles d’une source d’information, les entrées et les sorties d’un canal et les symboles reconstruits. D’autre part, la théorie des communications sécurisées permet de caractériser ce qu’un observateur externe peut inférer à propos d’une communication. En conséquence, nous sommes capables de décrire les corrélations qui peuvent être maintenues secrètes vis à vis d’un joueur ou d’un groupe de joueurs. Entre les résultats d’atteignabilité et ceux des réciproques, un large panel d’outils mathématiques issus de la théorie de Shannon [18] peut être adapté au problème du théorème Folk avec observation imparfaite. Notre approche est basée sur la décomposition en trois sous-problèmes. Il s’agit tout d’abord de décrire, au théorème 5.6, les quantités d’informations transmissibles à travers la structure d’observation \mathcal{T} d’un jeu à quatre joueurs. Ensuite nous montrons, au théorème 5.16, qu’un groupe de trois joueurs peut utiliser les possibilités de communication afin de s’échanger de l’information à propos des suite d’actions futures. Nous décrivons un ensemble de suites d’actions corrélées que le quatrième joueur ne peut pas deviner. Enfin nous montrons, au théorème 5.18, que le groupe de joueurs peut coordonner les suites d’actions de bloc en bloc selon les distributions empiriques réalisables de manière à punir le dernier joueur. Nous fournissons une borne supérieure sur les niveaux min-max de long terme qui tienne compte de la structure d’observation \mathcal{T} des joueurs.

Ce chapitre est articulé autour de la quatrième contribution comprenant les théorèmes 5.6 et 5.9 et de la cinquième contribution comprenant les théorèmes 5.18 et 5.16. Dans la section 5.2, nous introduisons le canal discret. Il consiste en un canal de diffusion \mathcal{T} comprenant un émetteur, deux récepteurs légitimes et un espion. La probabilité de transition est contrôlée par des états asymétriques, connus par l’émetteur et par les récepteurs. Nous décrivons une région des débits atteignables pour le modèle général. Cette région est incluse dans la région de capacité puisque le problème du canal de diffusion, contenu dans notre problème, est non-résolu à ce jour. La section 5.3 est consacrée à l’étude du résultat précédent appliqué au cas Gaussien. Les illustrations numériques nous autorisent à conclure que la variance des états du canal et le niveau de leur corrélation permettent d’augmenter la région des débits réalisables. Pour finir, la section 5.4 applique notre résultat de codage au problème des niveaux min-max dans les jeux répétés avec observation imparfaite. Nous proposons une borne supérieure sur les niveaux min-max des jeux de long terme à quatre joueurs avec observation imparfaite.

5.2 Canal discret

La notion du secret dans les systèmes de communication a été largement étudiée depuis 1949 et la publication de [66] par Shannon. Il introduit une mesure du secret pour les systèmes de communication appelée "incertitude" (en anglais "equivocation"). La capacité secrète du canal sur écoute, caractérisée par un émetteur, un récepteur et un espion (en anglais "eavesdropper"), a été déterminée dans [85] et est présenté à la section A.10. Dans [19], les auteurs étendent ce résultat au cas où le récepteur légitime

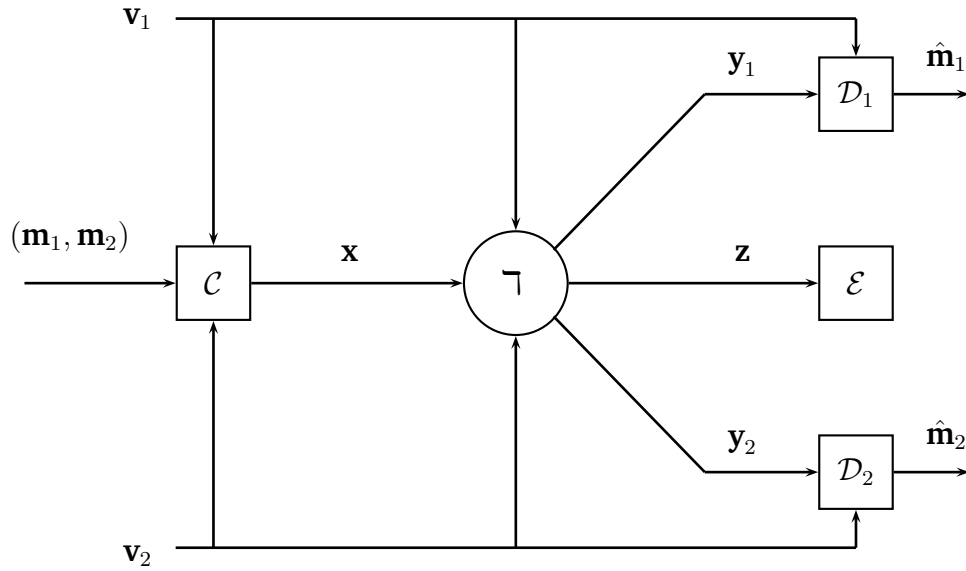


FIGURE 5.1 – Canal de diffusion sur écoute avec états asymétriques Γ . L'encodeur C envoie le message \mathbf{m}_1 (resp. \mathbf{m}_2) au décodeur \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2) à travers le canal Γ sans que l'espion \mathcal{E} ne puisse le décoder. Notons \mathbf{x} l'entrée du canal, \mathbf{v}_1 et \mathbf{y}_1 (resp. \mathbf{v}_2 et \mathbf{y}_2) les états et les sorties du canal observés par le premier (resp. le second) décodeur et \mathbf{z} la sortie du canal observée par l'espion.

et l'espion décotent, en plus, un message commun. Concernant le canal de diffusion (en anglais "broadcast channel"), nous présentons trois travaux pertinents. Les auteurs de [72] étudient un canal de diffusion qui dépend d'un état connu par l'encodeur. Dans ce modèle, la probabilité de transition est contrôlée par une suite d'états aléatoires tirés i.i.d. et dont les réalisations sont connues de manière non-causale à l'encodeur. La connaissance non-causale signifie que l'encodeur connaît la suite infinie des états, contrairement à la connaissance causale qui porte sur la suite d'états jusqu'à l'étape courante. Les auteurs de [6] fournissent une région des débits atteignables pour le canal de diffusion avec deux décodeurs (chacun d'eux doit décoder un message privé) ainsi qu'un espion. La région correspondante est optimale pour les canaux de diffusion phy-

siquement dégradés. Concernant le cas du canal de diffusion parallèle et inversement dégradé avec un espion et un nombre arbitraire de récepteurs, les auteurs de [43] déterminent la capacité secrète pour transmettre un message commun, et la somme des capacités secrète pour transmettre des messages indépendants.

La contribution la plus proche de nos travaux apparaît dans [16]. Les auteurs proposent un débit réalisable pour le canal sur écoute discret avec état, lorsque ce dernier est connue de manière non-causale par l'émetteur (au sens de [31]). Le débit sécurisé réalisable est le minimum du débit sécurisé du canal sur écoute [85] et du débit du canal avec états caractérisé par Gel'fand and Pinsker dans [31] et est présenté à la section A.7. Le schéma de codage dans [16] atteint l'un de ces deux débits et satisfait la contrainte de sécurité $R \leq \frac{H(\mathbf{m}|\mathbf{z}^n)}{n}$ où m est le message de source, n est la taille des mots de code et \mathbf{z}^n le vecteur d'observation de l'espion. Nous étendons ce résultat en considérant le canal de diffusion sur écoute avec états asymétrique représentée figure 5.2. Deux différences importantes par rapport à [16] sont considérées :

- Le canal possède deux récepteurs.
- Chaque récepteur ne connaît qu'une partie du couple des états du canal.

Pour être plus précis, si (v_1, v_2) représente le couple des états du canal, le récepteur ou le décodeur \mathcal{D}_k , avec $k \in \{1, 2\}$ ne connaît que v_k . Pour sa part, l'espion \mathcal{E} ne connaît pas les états du canal. Les deux principales motivations pour l'étude d'une région des débits atteignables pour ce canal multi-utilisateurs sont les suivantes. Tout d'abord, le but est de mieux comprendre l'influence des états du canal sur les performances limites des communications sécurisées. Dans un second temps, cette étude nous permet de tirer des conclusions relatives aux problèmes d'observations dans les jeux de long terme. En effet, les canaux multi-utilisateurs permettent de quantifier l'information stratégique qui circule dans les jeux répétés avec des structures d'observation arbitraires.

Le modèle du canal et le résultat d'atteignabilité sont présentés respectivement aux sections 5.2.1 et 5.2.2. La démonstration du théorème 5.6 apparaît à la section 5.2.3.

5.2.1 Modèle de canal

Dans cette section, $\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}$ désignent les variables aléatoires de l'entrée du canal $x \in \mathcal{X}$, de l'état connu par le premier $v_1 \in \mathcal{V}_1$ et le second $v_2 \in \mathcal{V}_2$ décodeur, la sortie du canal du premier $y_1 \in \mathcal{Y}_1$ et du second $y_2 \in \mathcal{Y}_2$ décodeur et $z \in \mathcal{Z}$ de l'espion (voir figure 5.2). Le produit n -fois de l'ensemble \mathcal{X} est noté \mathcal{X}^n . Les suites correspondantes sont notées $\mathbf{z}^n = (z^1, \dots, z^n)$. Les messages \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont distribués uniformément parmi les ensembles \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 dont les cardinalités sont notées $M_1 = |\mathcal{M}_1|$ et $M_2 = |\mathcal{M}_2|$. La notation $\Delta(\mathcal{Y})$ désigne l'ensemble des distributions de probabilités sur l'ensemble \mathcal{Y} , $\mathcal{P}^{\otimes n} \in \Delta(\mathcal{X}^n)$ désigne la probabilité produit n -fois $\mathcal{P} \in \Delta(\mathcal{X})$ et $\text{conv } \mathcal{R}$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble \mathcal{R} .

Considérons le canal de diffusion sur écoute avec des états asymétriques (en anglais

"the broadcast wiretap channel with asymmetric side information"), décrit par la figure 5.2 et défini par l'équation qui suit.

$$\mathsf{T} : \mathcal{X} \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \longrightarrow \Delta(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Z}). \quad (5.1)$$

Les états du canal v_1, v_2 sont tirées de manière indépendante et identiquement distribuées d'étape en étape suivant la probabilité conjointe $P_v \in \Delta(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$. La suite des réalisations v_1^n, v_2^n est connue de manière non-causale par l'encodeur et par le décodeur respectif. Le canal est discret et sans mémoire et sans retour d'information. La probabilité de transition en n -étapes est définie comme suit.

$$\mathsf{T}^{\otimes n}(y_1^n, y_2^n, z^n | x^n, v_1^n, v_2^n) = \prod_{i=1}^n \mathsf{T}(y_1^i, y_2^i, z^i | x^i, v_1^i, v_2^i). \quad (5.2)$$

Définition 5.1 Définissons un (n, M_1, M_2) -code comme un triplet de fonctions :

$$f : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \mathcal{V}_1^n \times \mathcal{V}_2^n \longrightarrow \mathcal{X}^n, \quad (5.3)$$

$$g_1 : \mathcal{Y}_1^n \times \mathcal{V}_1^n \longrightarrow \mathcal{M}_1, \quad (5.4)$$

$$g_2 : \mathcal{Y}_2^n \times \mathcal{V}_2^n \longrightarrow \mathcal{M}_2. \quad (5.5)$$

$(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2)$ désigne les variables aléatoires des messages reconstruits par le code. Définissons la probabilité d'erreur \mathcal{P}_e^n associée à chaque (n, M_1, M_2) -code comme suit.

$$\mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}((\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \neq (\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2)). \quad (5.6)$$

La quantité d'informations que véhicule un code est reliée aux cardinalités M_1 et M_2 des ensembles des messages $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ ainsi qu'à la longueur n des mots de codes x^n . Comme dans [65], cette quantité est mesurée par le débit $R_k = \frac{\log_2 M_k}{n}$ du code avec $k \in \{1, 2\}$. Dans le contexte des communications sécurisées, l'incertitude de l'espion est définie dans [66] par $\frac{H(\mathbf{m}|\mathbf{z}^n)}{n}$ et mesure le niveau de confidentialité garanti par le code. Lorsque ce niveau est supérieur au débit du code, cela empêche l'espion de décoder correctement l'information transmise.

Définition 5.2 Un couple de débits (R_1, R_2) est dite atteignable si pour tout $\varepsilon > 0$, il

existe un (n, M_1, M_2) -code tel que :

$$\frac{\log_2 M_1}{n} \geq R_1 - \varepsilon, \quad (5.7)$$

$$\frac{\log_2 M_2}{n} \geq R_2 - \varepsilon, \quad (5.8)$$

$$\frac{H(\mathbf{m}_1|\mathbf{z}^n)}{n} \geq R_1 - \varepsilon, \quad (5.9)$$

$$\frac{H(\mathbf{m}_2|\mathbf{z}^n)}{n} \geq R_2 - \varepsilon, \quad (5.10)$$

$$\frac{H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2|\mathbf{z}^n)}{n} \geq R_1 + R_2 - \varepsilon, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon. \quad (5.12)$$

Notons \mathcal{R} l'ensemble des couples de débits atteignables.

Remarque 5.3 La relation $H(\mathbf{m}_k|\mathbf{z}^n) \leq H(\mathbf{m}_k) \leq \log_2 M_k$ est vraie pour $k \in \{1, 2\}$. En conséquence, l'équation (5.9) (resp. (5.10)) implique l'équation (5.7) (resp. (5.8)).

5.2.2 Résultat d'atteignabilité

Nous fournissons une région des débits atteignables pour le canal de diffusion sur écoute et des états asymétriques. Pour ce faire, nous introduisons un couple de variables aléatoires auxiliaires.

Définition 5.4 Soient \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 des variables aléatoires auxiliaires dont les réalisations u_1 et u_2 appartiennent aux ensembles \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 . Désignons \mathcal{R}_I l'ensemble des couples de débits (R_1, R_2) tel qu'il existe une distribution de probabilités $\mathcal{P}(u_1, u_2, x|v_1, v_2)$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} R_1 &\leq I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) - \max(I(\mathbf{u}_1; \mathbf{z}), I(\mathbf{u}_1; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)), \\ R_2 &\leq I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) - \max(I(\mathbf{u}_2; \mathbf{z}), I(\mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)), \\ R_1 + R_2 &\leq I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) + I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) \\ &\quad - \max(I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}), I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Chacune de ces trois équations est un minimum entre le débit d'un canal avec états (par exemple $I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$) et le débit d'un canal sur écoute ($I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{z})$).

Remarque 5.5 La distribution de probabilités $\mathcal{P}(u_1, u_2, x|v_1, v_2)$ induit une distribution de probabilités générale \mathcal{Q} qui satisfait la propriété de Markov suivante

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - (\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}). \quad (5.14)$$

Cette distribution de probabilités \mathcal{Q} est définie sur les variables $(u_1, u_2, x, v_1, v_2, y_1, y_2, z)$, par l'équation suivante :

$$\mathcal{Q}(u_1, u_2, x, v_1, v_2, y_1, y_2, z) = P_v(v_1, v_2) \times \mathcal{P}(u_1, u_2, x|v_1, v_2) \times \mathsf{T}(y_1, y_2, z|x, v_1, v_2).$$

Nous montrons que les couples de débits (R_1, R_2) qui satisfont le système d'équation (5.13) sont réalisables.

Théorème 5.6 (Quatrième contribution) *Tout couple de débits $(R_1, R_2) \in \text{conv } \mathcal{R}_I$ est atteignable $\text{conv } \mathcal{R}_I \in \mathcal{R}$ pour le canal de diffusion sur écoute avec états asymétriques.*

Remarque 5.7 Lorsque la suite des entrées du canal x^n doit être corrélée avec une suite de symboles s^n tirés i.i.d, alors nous devons considérer la variable aléatoire \mathbf{v} comme un état du canal même si la réalisation v ne modifie pas la probabilité de transition T du canal. Cette remarque s'applique plus particulièrement aux problèmes des jeux répétés avec observation imparfaite (voir la section 5.4).

Ce théorème est publié dans [82]. La région des débits atteignables que nous proposons \mathcal{R}_I est une généralisation de celle de [16]. Elle rappelle deux régions de débits. La première provient de la présence de l'état du canal [72] tandis que la seconde provient de la présence d'un espion [6]. Notons que lorsque le signal de l'espion est constant ($Z = c$) et que l'état du canal est seulement connue par l'encodeur, la région $\text{conv } \mathcal{R}_I$ des débits atteignables est égale à celle de [72] avec une variable W constante. Si l'état du canal est fixée constant ($\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = c$), la région des débits est réduite à celle de [6]. Pour finir, lorsque le second récepteur (\mathcal{D}_2) et l'état du canal ($\mathbf{v}_1 = c$) sont retirés, le débit réalisable se ramène à celui de [16].

5.2.3 Démonstration du théorème 5.6

Montrons que le couple de débits $(R_1, R_2) \in \mathcal{R}_I$ qui satisfait les inégalités (5.13) est atteignable. Fixons une distribution de probabilités $\mathcal{Q}(u_1, u_2, x, v_1, v_2, y_1, y_2, z)$ et un couple de débits $(R_1, R_2) \in \mathcal{R}_I$ satisfaisant le système d'inégalités (5.13) tel que les marginales de \mathcal{Q} satisfont la probabilité de transition du canal $\mathsf{T}(y_1, y_2, z|x, v_1, v_2)$ et la distribution $P_v(v_1, v_2)$. Notons \mathcal{Q}_{U_1} et \mathcal{Q}_{U_2} les distributions de probabilités marginales induites par \mathcal{Q} sur les ensembles \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 . Notons $A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2|v_1^n, v_2^n)$ l'ensemble des suites typiques u_1^n, u_2^n qui sont conjointement typiques avec v_1^n, v_2^n pour la distribution de probabilités \mathcal{Q} . Les définitions et propriétés des suites typiques sont disponibles dans [18] et dans [20].

- Génération du livre de code : générons $M_{Y_1} = 2^{nR_{Y_1}} = 2^{n(I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) - \varepsilon)}$ suites u_1^n tirées suivant la distribution de probabilités $\mathcal{Q}_{U_1}(u_1)^{\otimes n}$. Regroupons-les en $M_1 = 2^{nR_1}$ paquets notés $m_1 \in \{1, \dots, M_1\}$, chacun d'entre-eux contenant $M_{U_1} =$

$2^{nR_{U_1}}$ suites u_1^n . Divisons chaque paquet m_1 en $M_{W_1} = 2^{nR_{W_1}}$ sous-paquets notés $w_1 \in \{1, \dots, M_{W_1}\}$ contenant chacun d'entre-eux $M_{Z_1} = 2^{nR_{Z_1}}$ suites u_1^n avec les paramètres suivants $R_{U_1}, R_{Y_1}, R_1, R_{Z_1}$. Générans $M_{Y_2} = 2^{nR_{Y_2}} = 2^{n(I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) - \epsilon)}$ suites u_2^n suivant la distribution $\mathcal{Q}_{U_2}(u_2)^{\otimes n}$. Regroupons-les en $M_2 = 2^{nR_2}$ paquets notés $m_2 \in \{1, \dots, M_2\}$, contenant chacun d'entre-eux $M_{U_2} = 2^{nR_{U_2}}$ suites u_2^n . Divisons chaque paquet m_2 en $M_{W_2} = 2^{nR_{W_2}}$ sous-paquets notés $w_2 \in \{1, \dots, M_{W_2}\}$ contenant chacun d'entre-eux $M_{Z_2} = 2^{nR_{Z_2}}$ suites u_2^n avec les paramètres suivants $R_{U_2}, R_{Y_2}, R_2, R_{Z_2}$. Pour chaque tuplet de suites $(u_1^n, u_2^n, v_1^n, v_2^n)$, tirons une suite x^n suivant la distribution de probabilités $\mathcal{Q}(x|u_1, u_2, v_1, v_2)^{\otimes n}$.

- L'encodeur obtient les messages $(m_1, m_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ et les suites d'états du canal (v_1^n, v_2^n) . Il trouve un couple de suites u_1^n dans le paquet m_1 et u_2^n dans le paquet m_2 tel que $(u_1^n, u_2^n) \in A_\epsilon^{*n}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 | v_1^n, v_2^n)$. L'encodeur envoie la suite x^n correspondant au tuplet de suites $(u_1^n, u_2^n, v_1^n, v_2^n)$.
- Le décodeur 1 reçoit la sortie du canal y_1^n et la suite d'états du canal v_1^n . Il trouve une unique suite u_1^n telle que $u_1^n \in A_\epsilon^{*n}(\mathcal{U}_1 | y_1^n, v_1^n)$ et renvoie l'index du paquet i_1 contenant la suite u_1^n .
- Le décodeur 2 reçoit la sortie du canal y_2^n et la suite d'états du canal v_2^n . Il trouve une unique suite u_2^n telle que $u_2^n \in A_\epsilon^{*n}(\mathcal{U}_2 | y_2^n, v_2^n)$ et renvoie l'index du paquet i_2 contenant la suite u_2^n .

$$\begin{aligned} R_{U_1} &> I(\mathbf{u}_1; \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1), \\ R_{U_2} &> I(\mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \\ R_{U_1} + R_{U_2} &> I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) + I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} R_{Y_1} = R_{U_1} + R_1 &< I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1), \\ R_{Y_2} = R_{U_2} + R_1 &< I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2), \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} R_{Z_1} &< I(\mathbf{u}_1; \mathbf{z}), \\ R_{Z_2} &< I(\mathbf{u}_2; \mathbf{z}), \\ R_{Z_1} + R_{Z_2} &< I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) + I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} R_{U_1} &> R_{Z_1}, \\ R_{U_2} &> R_{Z_2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

La démonstration est construite en trois parties. Premièrement, nous montrons que la probabilité d'erreur est bornée supérieurement par $\epsilon > 0$ lorsque n tend vers l'infini. Deuxièmement, nous montrons que le taux d'incertitude de l'espion est suffisamment

élevé lorsque n tend vers l'infini. Troisièmement, nous montrons que le couple des débits (R_1, R_2) appartient à la région des débits atteignables qui satisfait les inégalités (5.13).

Analyse de la probabilité d'erreur. Cette démonstration est basée sur les lemmes A.12, A.13 et A.14 de la section A.2. Les techniques utilisées dans cette démonstration, servent à démontrer les résultats des articles [31] et [49] présentés aux sections A.7 et A.9. Sans perte de généralité, nous supposons que l'encodeur transmet les messages (m_1, m_2) . Notons B_{m_1} et B_{m_2} les paquets des suites u_1^n et u_2^n respectivement. Définissons les événements d'erreur suivants :

- $\mathcal{E}_1 = \{(v_1^n, v_2^n) \notin A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)\}$ les deux suites d'états du canal ne sont pas conjointement typiques.
- $\mathcal{E}_2 = \{\forall (u_1^n, u_2^n) \in m_1 \times m_2, (u_1^n, u_2^n) \notin A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 | v_1^n, v_2^n)\}$ aucun couple de suites (u_1^n, u_2^n) dans les paquets m_1 et m_2 n'est conjointement typique avec (v_1^n, v_2^n) .
- $\mathcal{E}_3 = \{(x^n, y_1^n, y_2^n, z^n) \notin A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Z} | u_1^n, u_2^n, v_1^n, v_2^n) | (u_1^n, u_2^n, v_1^n, v_2^n) \in A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)\}$ la famille (x^n, y_1^n, y_2^n, z^n) des suites n'est pas conjointement typique avec le couple de suites conjointement typique $(u_1^n, u_2^n, v_1^n, v_2^n)$.
- $\mathcal{E}_4 = \{\exists u_1'^n \neq u_1^n, (u_1'^n, y_1^n, v_1^n)^n \in A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{V}_1)\}$ il existe une autre suite $u_1'^n \neq u_1^n$ qui est conjointement typique avec la sortie y_1^n et l'état v_1^n du canal.
- $\mathcal{E}_5 = \{\exists u_2'^n \neq u_2^n, (u_2'^n, y_2^n, v_2^n)^n \in A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U}_2 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{V}_2)\}$ il existe une autre suite $u_2'^n \neq u_2^n$ qui est conjointement typique avec la sortie y_2^n et l'état v_2^n du canal.

En utilisant l'équation A.24 du lemme A.14 de recouvrement mutuel [25], nous bornons $\mathcal{P}(\mathcal{E}_2)$ par ε dès que les inégalités suivantes sont satisfaites.

$$R_{U_1} > I(\mathbf{u}_1; \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1), \quad (5.19)$$

$$R_{U_2} > I(\mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \quad (5.20)$$

$$R_{U_1} + R_{U_2} > I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) + I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \quad (5.21)$$

De même, en utilisant l'équation A.22 du lemme A.14, les probabilités d'erreur $\mathcal{P}(\mathcal{E}_4)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{E}_5)$ sont bornées par ε dès que :

$$R_{Y_1} = R_{U_1} + R_1 < I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1), \quad (5.22)$$

$$R_{Y_2} = R_{U_2} + R_1 < I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2). \quad (5.23)$$

Pour borner $\mathcal{P}(\mathcal{E}_1)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{E}_3)$, nous utilisons les propriétés classiques des suites typiques données par les lemmes A.12 et A.13. Donc pour tout ε , il existe n tel que,

$$\mathcal{P}_e^n \leq 5\varepsilon. \quad (5.24)$$

Nous avons montré que la probabilité d'erreur est bornée supérieurement par 5ε .

Le taux d'incertitude de l'espion. Notons $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$ le couple de variables aléatoires des paquets et $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ le couple de variables aléatoires des sous-paquets. Montrons que

$\frac{H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 | \mathbf{z}^n)}{n} \geq R_1 + R_2 - \varepsilon$. Introduisons les variables aléatoires $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ et $\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n$ dans l'expression de $H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 | \mathbf{z}^n)$.

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 | \mathbf{z}^n) &= H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{z}^n) - H(\mathbf{z}^n) \\
&= H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}^n) \\
&\quad - H(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{z}^n) - H(\mathbf{z}^n) \\
&= H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n, \mathbf{z}^n) \\
&\quad - H(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}^n) \\
&\quad - H(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{z}^n) - H(\mathbf{z}^n) \\
&= H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 | \mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n, \mathbf{z}^n) \\
&\quad + H(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n, \mathbf{z}^n) \\
&\quad - H(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}^n) \\
&\quad - H(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{z}^n) - H(\mathbf{z}^n) \\
&= H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 | \mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n, \mathbf{z}^n) \tag{5.25} \\
&\quad + H(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n | \mathbf{z}^n) \tag{5.26} \\
&\quad - H(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}^n) \tag{5.27} \\
&\quad - H(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{z}^n). \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Nous proposons une borne inférieure pour chacun des quatre termes de l'équation ci-dessus.

Le premier terme (5.25) dans l'équation ci-dessus est supprimé.

Le second terme (5.26) est borné inférieurement, grâce à la règle de chaîne [18], par la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n | \mathbf{z}^n) &= H(\mathbf{u}_1^n) + H(\mathbf{u}_2^n) - I(\mathbf{u}_1^n; \mathbf{u}_2^n) - I(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n; \mathbf{z}) \\
&\geq I(\mathbf{u}_1^n; \mathbf{y}_1^n, \mathbf{v}_1^n) + I(\mathbf{u}_2^n; \mathbf{y}_2^n, \mathbf{v}_2^n) \\
&\quad - I(\mathbf{u}_1^n; \mathbf{u}_2^n) - I(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n; \mathbf{z}) \\
&\geq n[I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) + I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) \\
&\quad - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) - I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z})].
\end{aligned}$$

Le troisième terme (5.27) est borné inférieurement par $-2\varepsilon - n2\varepsilon \log_2 |Z|$ en utilisant le lemme A.16 appelé inégalité de Fano ainsi que le système de conditions suivant :

$$R_{Z_1} < I(\mathbf{u}_1; \mathbf{z}), \tag{5.29}$$

$$R_{Z_2} < I(\mathbf{u}_2; \mathbf{z}), \tag{5.30}$$

$$R_{Z_1} + R_{Z_2} < I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) + I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}). \tag{5.31}$$

Sans perte de généralité, nous considérons que le couple $(u_1^n, u_2^n) \in \mathcal{U}_1^n \times \mathcal{U}_2^n$ a été choisi à l'encodeur. Notons m_1 et m_2 les index des paquets correspondant aux messages transmis et w_1 et w_2 les index des sous-paquets contenant les suites u_1^n, u_2^n . Considérons que

l'espion connaît les $\text{index}(m_1, m_2)$ et (w_1, w_2) , et supposons qu'il utilise un décodeur typique.

$$g : \mathcal{Z}^n \longrightarrow \mathcal{U}_1^n \times \mathcal{U}_2^n. \quad (5.32)$$

À la suite z^n , il associe le couple (u_1^n, u_2^n) si ce dernier appartient aux paquets (m_1, m_2) , aux sous-paquets (w_1, w_2) et s'il est conjointement typique avec z^n . Définissons les événements suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_6 &= \{(u_1^n, u_2^n) \in (m_1 \times m_2) \cap (w_1 \times w_2), (u_1^n, u_2^n) \notin A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 | z^n)\}, \\ \mathcal{E}_7 &= \{\exists (u_1'^n, u_2'^n) \neq (u_1^n, u_2^n) \in (m_1 \times m_2) \cap (w_1 \times w_2), \text{ s.t. } (u_1'^n, u_2'^n) \in A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 | z^n)\}. \end{aligned}$$

L'événement d'erreur \mathcal{E}_6 est réalisé lorsque la sortie du canal z^n n'est pas conjointement typique avec les suites u_1^n, u_2^n . L'événement d'erreur \mathcal{E}_7 est réalisé lorsque la sortie du canal z^n est conjointement typique avec un autre couple de suites $(u_1'^n, u_2'^n) \neq (u_1^n, u_2^n)$. La probabilité d'erreur d'une telle fonction de décodage est bornée supérieurement par 2ε . En effet,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}((\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n) \neq g(\mathbf{z}^n) \text{ s.t. } (\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n) \in (m_1 \times m_2) \cap (w_1 \times w_2)) \quad (5.33)$$

$$\leq \mathcal{P}(\mathcal{E}_6) + \mathcal{P}(\mathcal{E}_7) \leq 2\varepsilon, \quad (5.34)$$

où $\mathcal{P}(\mathcal{E}_6) \leq \varepsilon$ est due aux propriétés des suites typiques énoncées au lemme A.13 et $\mathcal{P}(\mathcal{E}_7) \leq \varepsilon$ est due à la propriété A.22 du lemme A.14 ainsi qu'au système d'équations ci-dessus (5.29)-(5.31). En utilisant le lemme A.16 de Fano nous avons :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}^n) &\leq H(\mathcal{P}) + n\mathcal{P}(\log |Z| - \varepsilon) \\ &\leq 2\varepsilon + n2\varepsilon \log_2 |Z|. \end{aligned}$$

Le quatrième terme (5.28) est borné inférieurement par la quantité suivante : $-n(\max[I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}), 0] + 4\varepsilon)$. D'après la condition (5.21) et la définition des sous-paquets, nous avons :

$$R_{U_1} + R_{U_2} \geq \max[I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2), R_{Z_1} + R_{Z_2}]. \quad (5.35)$$

Supposons que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$R_{U_1} + R_{U_2} \leq \max[I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2), R_{Z_1} + R_{Z_2}] + 2\varepsilon, \quad (5.36)$$

$$R_{Z_1} + R_{Z_2} \geq I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) + I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}) - 2\varepsilon. \quad (5.37)$$

Montrons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{z}^n) &\leq \log(|W_1| \times |W_2|) \\
&= n(R_{U_1} + R_{U_2} - R_{Z_1} - R_{Z_2}) \\
&\leq n(\max[I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) + I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \\
&\quad I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2)I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z})] + 2\varepsilon \\
&\quad - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) - I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}) + 2\varepsilon) \\
&\leq n(\max[I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}), 0] + 4\varepsilon).
\end{aligned}$$

En combinant les quatre termes ci-dessus, nous obtenons une borne inférieure $R_1 + R_2 - \bar{\varepsilon}$ sur le taux d'incertitude de l'espion.

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 | \mathbf{z}^n) &\geq n(I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) + I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) \\
&\quad - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) - I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z})) - 2\varepsilon - n2\varepsilon \log_2 |Z| \\
&\quad - n(\max(I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}), 0) + 4\varepsilon) \\
&\geq n(I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) + I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) \\
&\quad - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) - \max(I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}))) \\
&\quad - 2\varepsilon - n\varepsilon(2 \log_2 |Z| + 4) \\
&\geq n(R_1 + R_2) - 2\varepsilon - n\varepsilon(2 \log_2 |Z| + 4).
\end{aligned}$$

Nous avons montré que l'incertitude de l'espion atteint son niveau maximal.

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 | \mathbf{z}^n) &\geq n(R_1 + R_2) - \bar{\varepsilon} \\
\iff \frac{I(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2; \mathbf{z}^n)}{n} &\leq \bar{\varepsilon},
\end{aligned}$$

avec $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(2/n + 2 \log_2 |Z| + 4)$. Les mêmes arguments s'appliquent pour borner inférieurement les taux d'incertitude suivants :

$$\frac{H(\mathbf{m}_1 | \mathbf{z}^n)}{n} \geq R_1 - \bar{\varepsilon}, \tag{5.38}$$

$$\frac{H(\mathbf{m}_2 | \mathbf{z}^n)}{n} \geq R_2 - \bar{\varepsilon}. \tag{5.39}$$

Les débits de transmission sont déterminés par la taille des paquets du codage :

$$\begin{aligned}
R_1 &= R_{Y_1} - R_{U_1}, \\
R_2 &= R_{Y_2} - R_{U_2}, \\
R_1 + R_2 &= (R_{Y_1} + R_{Y_2}) - R_{U_1} - R_{U_2}.
\end{aligned}$$

Nous avons montré que le codage atteint tous les couples de débits de la région \mathcal{R}_I .

$$\begin{aligned} R_1 &\leq I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) - \max[I(\mathbf{u}_1; \mathbf{z}), I(\mathbf{u}_1; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)], \\ R_2 &\leq I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) - \max[I(\mathbf{u}_2; \mathbf{z}), I(\mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)], \\ R_1 + R_2 &\leq I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) + I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) \\ &\quad - \max[I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z}), I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)]. \end{aligned}$$

Un argument classique de partage temporel montre que l'ensemble de l'enveloppe convexe $\text{conv } \mathcal{R}_I$ est atteignable.

5.3 Canal de diffusion sur écoute Gaussien avec états asymétriques

Dans cette section, nous illustrons le théorème 5.6 pour le canal de communications Gaussien décrit par la figure 5.2. Au moins deux résultats importants sont soulignés.

- La présence de perturbations connues par l'encodeur (\mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2) permet d'augmenter les débits des communications sécurisées.
- La corrélation des états du canal \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 et la connaissance de l'information \mathbf{v}_k au décodeur $k \in \{1, 2\}$ permettent, elles aussi, d'augmenter la région des débits de communication.

Le modèle du canal Gaussien et la région des débits atteignables sont présentés respectivement aux sections 5.3.1 et 5.3.2. La section 5.3.4 présente les illustrations numériques du théorème 5.9 pour différentes variances et corrélations des états du canal. La démonstration du théorème 5.9 apparaît en annexe, à la section 5.3.3.

5.3.1 Modèle du canal Gaussien

L'étude du cas Gaussien permet de mieux comprendre le rôle des variances et de la corrélation de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 pour la région des débits réalisables. Le canal de diffusion sur écoute Gaussien avec états asymétriques est défini comme suit :

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{b}_1, \tag{5.40}$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{b}_2, \tag{5.41}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{b}_3, \tag{5.42}$$

où \mathbf{x} est l'entrée du canal, \mathbf{y}_1 est le signal reçu par le décodeur \mathcal{D}_1 , \mathbf{y}_2 est le signal reçu par le décodeur \mathcal{D}_2 , \mathbf{z} est le signal reçu par l'espion \mathcal{E} , \mathbf{v}_k est l'état du canal connu par

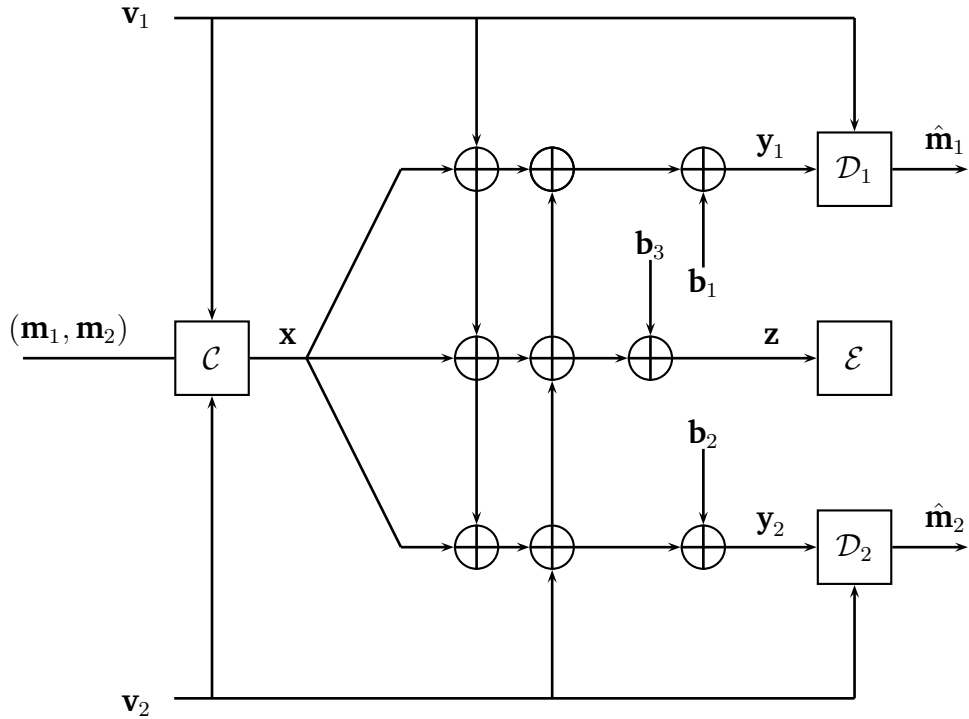


FIGURE 5.2 – Canal de diffusion sur écoute Gaussien avec états asymétriques.

l'encodeur et par le décodeur \mathcal{D}_k avec $k \in \{1, 2\}$. Notons \mathbf{b}_1 (resp. \mathbf{b}_2 et \mathbf{b}_3) le bruit Gaussien qui atténue le signal du récepteur \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2 et \mathcal{E}). Les variables aléatoires sont gaussiennes, centrées en zéro et de variances définies comme suit :

$$\mathbf{b}_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1), \quad (5.43)$$

$$\mathbf{b}_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2), \quad (5.44)$$

$$\mathbf{b}_3 \sim \mathcal{N}(0, N_3), \quad (5.45)$$

$$\mathbf{v}_1 \sim \mathcal{N}(0, Q_1), \quad (5.46)$$

$$\mathbf{v}_2 \sim \mathcal{N}(0, Q_2). \quad (5.47)$$

Les états du canal \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont corrélés selon le paramètre de corrélation $\rho = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]}{\sqrt{Q_1 Q_2}}$. L'entrée du canal \mathbf{x} doit satisfaire les contraintes suivantes :

$$\mathbb{E} \mathbf{x}^2 \leq P. \quad (5.48)$$

Sans perte de généralité, nous supposons que $N_1 \geq N_2$. Le canal du premier émetteur est plus affecté par le bruit que celui du second. Évaluons la région des débits

réalisables pour le canal de diffusion sur écoute Gaussien avec états asymétriques. Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\beta \in [0, 1]$ et $\bar{\beta} = 1 - \beta$. Décomposons \mathbf{x} en deux variables aléatoires indépendantes \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 telles que :

$$\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N}(0, \beta P), \quad (5.49)$$

$$\mathbf{x}_2 \sim \mathcal{N}(0, \bar{\beta} P), \quad (5.50)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2. \quad (5.51)$$

Définissons les variables auxiliaires suivantes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, gaussiennes et centrées :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_1 + \alpha_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \sim \mathcal{N}(0, \beta P + \alpha_1^2(Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2})),$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{x}_2 + \alpha_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{x}_1) \sim \mathcal{N}(0, \bar{\beta} P + \alpha_2^2(Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2} + \beta P)).$$

5.3.2 Région des débits réalisables (R_1, R_2)

Nous évaluons la région des débits réalisables fournie par le théorème 5.6 dans le cas d'un canal ∇ gaussien.

Définition 5.8 L'entropie différentielle $h(\mathbf{x})$ d'une variable aléatoire sur un espace continu \mathcal{X} avec une fonction de densité $f(x)$ est définie par l'équation suivante :

$$h(\mathbf{x}) = - \int_{\mathcal{X}} f(x) \log_2 f(x) dx \quad (5.52)$$

où \log_2 désigne le logarithme en base 2.

Théorème 5.9 Tout couple de débits (R_1, R_2) qui satisfait les équations 5.53, 5.54 et 5.55 est réalisable

$$\begin{aligned} R_1 &\leq I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) - \max(I(\mathbf{u}_1; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), I(\mathbf{u}_1; \mathbf{z})) \\ &= h(\mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) - h(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \max(h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - h(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), h(\mathbf{z}) - h(\mathbf{u}_1, \mathbf{z})) \\ &= \frac{1}{2} \min \left(\log \left(\frac{(P + Q_2(1 - \rho^2) + N_1)\beta P}{Q_2\beta P(1 - \rho^2)(1 - \alpha_1)^2 + (N_1 + \bar{\beta}P)(\beta P + \alpha_1^2 Q_2(1 - \rho^2))} \right), \right. \\ &\quad \log \left(\frac{P + Q_2(1 - \rho^2) + N_1}{Q_2\beta P(1 - \rho^2)(1 - \alpha_1)^2 + (N_1 + \bar{\beta}P)(\beta P + \alpha_1^2 Q_2(1 - \rho^2))} \right) \\ &\quad \times \left. \frac{(N_3 + \bar{\beta}P)(\beta P + \alpha_1^2(Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2})) + \beta P(Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2})(1 - \alpha_1)^2}{P + Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2} + N_3} \right). \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned}
R_2 &\leq I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - \max(I(\mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), I(\mathbf{u}_2; \mathbf{z})) \\
&= h(\mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) - h(\mathbf{y}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - \max(h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - h(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), h(\mathbf{z}) - h(\mathbf{u}_2, \mathbf{z})) \\
&= \frac{1}{2} \min \left(\log \left(\frac{(P + Q_1(1 - \rho^2) + N_2)(\bar{\beta}P + \alpha_2^2\beta P)}{\bar{\beta}P(Q_1(1 - \rho^2) + \beta P)(1 - \alpha_2)^2 + N_2(\bar{\beta}P + \alpha_2^2(\beta P + Q_1(1 - \rho^2)))} \right), \right. \\
&\quad \log \left(\frac{P + Q_1(1 - \rho^2) + N_2}{\bar{\beta}P(Q_1(1 - \rho^2) + \beta P)(1 - \alpha_2)^2 + N_2(\bar{\beta}P + \alpha_2^2(\beta P + Q_1(1 - \rho^2)))} \right) \\
&\quad \times \left. \frac{N_3(\bar{\beta}P + \alpha_2^2(Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2} + \beta P)) + \bar{\beta}P(Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2} + \beta P)(1 - \alpha_2)^2}{P + Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2} + N_3} \right). \tag{5.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 + R_2 &\leq I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) + I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2) \\
&\quad - \max(I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), I(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{z})) \\
&\leq h(\mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) - h(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + h(\mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) - h(\mathbf{y}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\
&\quad - \max(h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - h(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), h(\mathbf{z}) - h(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{z})) \\
&= \frac{1}{2} \min \left(\log \left(\beta P \bar{\beta} P (P + Q_2(1 - \rho^2) + N_1)(P + Q_1(1 - \rho^2) + N_2) \right) \right. \\
&\quad - \log \left(Q_2 \beta P (1 - \rho^2)(1 - \alpha_1)^2 + (N_1 + \bar{\beta}P)(\beta P + \alpha_1^2 Q_2(1 - \rho^2)) \right) \\
&\quad - \log \left(\bar{\beta} P (Q_1(1 - \rho^2) + \beta P)(1 - \alpha_2)^2 + N_2(\bar{\beta}P + \alpha_2^2(\beta P + Q_1(1 - \rho^2))) \right), \\
&\quad \log \left((P + Q_2(1 - \rho^2) + N_1)(P + Q_1(1 - \rho^2) + N_2) \right) \\
&\quad + \log \left(N_3(\bar{\beta}P(\beta P + \alpha_1^2(Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2}))) \right. \\
&\quad + \alpha_2^2(Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2})\beta P(1 - \alpha_1)^2 \\
&\quad + \left. \beta P \bar{\beta} P (Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2})(1 - \alpha_1)^2(1 - \alpha_2)^2 \right) \\
&\quad - \log \left(Q_2 \beta P (1 - \rho^2)(1 - \alpha_1)^2 + (N_1 + \bar{\beta}P)(\beta P + \alpha_1^2 Q_2(1 - \rho^2)) \right) \\
&\quad - \log \left(\bar{\beta} P (Q_1(1 - \rho^2) + \beta P)(1 - \alpha_2)^2 + N_2(\bar{\beta}P + \alpha_2^2(\beta P + Q_1(1 - \rho^2))) \right) \\
&\quad - \left. \log \left(P + Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2} + N_3 \right). \tag{5.55}
\end{aligned}$$

Le théorème 5.9 est publié dans [82] et sa démonstration est donnée à la section 5.3.3 suivante.

5.3.3 Démonstration du théorème 5.9

Le théorème 8.6.5 dans [18] permet de calculer l'entropie différentielle d'une variable aléatoire gaussienne.

Théorème 5.10 ([18]) *Soit \mathbf{x} une variable aléatoire définie sur un espace continu $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, d'espérance nulle et de matrice de covariance $K = \text{cov}(\mathbf{x})$ avec $K_{ij} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j]$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Alors,*

$$h(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{2} \log_2 \left((2\pi e)^n |K| \right), \quad (5.56)$$

avec égalité si et seulement si \mathbf{x} est une variable aléatoire gaussienne centrée $\mathcal{N}(0, K)$.

Nous évaluons les entropies des variables aléatoires dans la figure 5.3.

5.3.4 Illustrations numériques

Les résultats numériques (Fig. 5.4 and 5.5) illustrent les régions des débits réalisables en les comparant aux précédents travaux publiés dans [72], [6] et [16].

- ★ Dans la figure 5.4, nous comparons les régions des débits qui satisfont les équations du théorème 5.9 pour trois couples de variances $Q_1 = Q_2 \in \{0.2, 2, 20\}$ des états du canal \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 , avec un paramètre de corrélation $\rho = 0$. Les débits appartenant à l'enveloppe convexe de cette région sont réalisables. Lorsque les variances des états du canal sont faibles, ($Q_1 = Q_2 = 0.2$), la région des débits est proche de celle de [6]. Au contraire pour de fortes variances ($Q_1 = Q_2 = 20$), la région des débits se rapproche de celle de [72]. Une forte variance des états du canal peut compenser la présence d'un espion dans le réseau.
- ★ Dans la figure 5.5, nous comparons la région des débits qui satisfont les équations du théorème 5.9 pour trois paramètres de corrélation $\rho \in \{0, 0.7, 1\}$ différents. Les variances des états du canal sont fixées à $Q_1 = Q_2 = 0.2$. Les débits appartenant à l'enveloppe convexe de cette région sont réalisables. La surface de cette région s'étend lorsque le paramètre de corrélation ρ augmente. En effet, la région des débits réalisables pour $\rho = 1$ est proche de la région de capacité du canal de diffusion Gaussien. La corrélation des états du canal peut compenser la présence d'un espion dans le réseau.

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \log_2[2\pi e(P + Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2} + N_3)], \\
h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^2 Q_1 Q_2 (1 - \rho^2)], \\
h(\mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^2 (P + Q_2(1 - \rho^2) + N_1) Q_1], \\
h(\mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^2 (P + Q_1(1 - \rho^2) + N_2) Q_2], \\
h(\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{v}_1) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^3 Q_1 (Q_2 \beta P (1 - \rho^2) (1 - \alpha_1)^2 \\
&\quad + (N_1 + \bar{\beta} P) (\beta P + \alpha_1^2 Q_2 (1 - \rho^2)))], \\
h(\mathbf{u}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{v}_2) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^3 Q_2 (\bar{\beta} P (Q_1 (1 - \rho^2) + \beta P) (1 - \alpha_2)^2 \\
&\quad + N_2 (\bar{\beta} P + \alpha_2^2 (\beta P + Q_1 (1 - \rho^2))))], \\
h(\mathbf{u}_1, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^2 ((N_3 + \bar{\beta} P) (\beta P + \alpha_1^2 (Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2})), \\
&\quad + \beta P (Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2}) (1 - \alpha_1)^2)], \\
h(\mathbf{u}_2, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^2 (N_3 (\bar{\beta} P + \alpha_2^2 (Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2} + \beta P)), \\
&\quad + \bar{\beta} P (Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2} + \beta P) (1 - \alpha_2)^2)], \\
h(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^3 (N_3 (\bar{\beta} P (\beta P + \alpha_1^2 (Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2})), \\
&\quad + \alpha_2^2 (Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2}) \beta P (1 - \alpha_1)^2), \\
&\quad + \beta P \bar{\beta} P (Q_1 + Q_2 + 2\rho\sqrt{Q_1Q_2}) (1 - \alpha_1)^2 (1 - \alpha_2)^2)], \\
h(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^2 \beta P Q_1 Q_2 (1 - \rho^2)], \\
h(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^2 (\bar{\beta} P + \alpha_2^2 \beta P) Q_1 Q_2 (1 - \rho^2)], \\
h(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \frac{1}{2} \log_2[(2\pi e)^4 \beta P \bar{\beta} P Q_1 Q_2 (1 - \rho^2)]
\end{aligned}$$

FIGURE 5.3 – Entropies des variables aléatoires

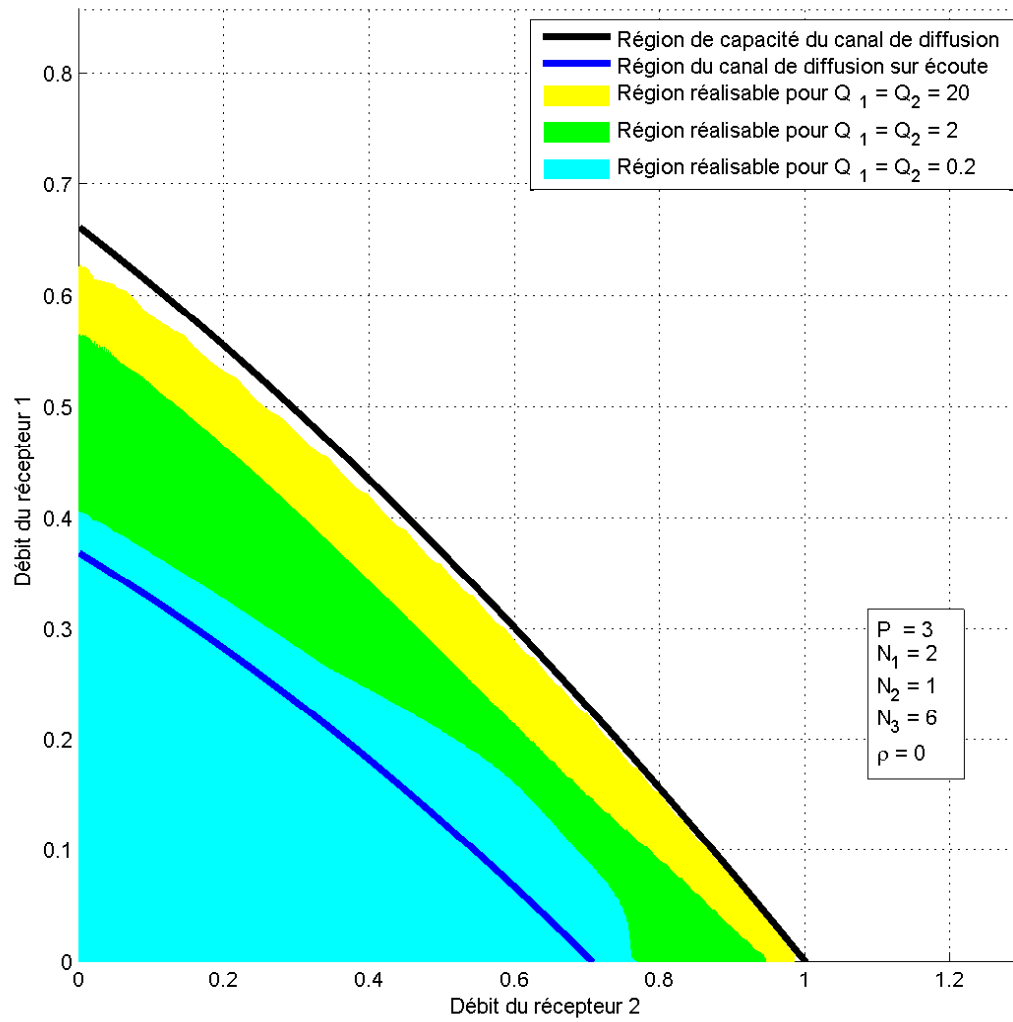


FIGURE 5.4 – Région des débits qui satisfont les équations du théorème 5.9 pour $\rho = 0$ et trois types d'états du canal $Q_1 = Q_2 \in \{0.2, 2, 20\}$. Les débits appartenant à l'enveloppe convexe de cette région sont réalisables.

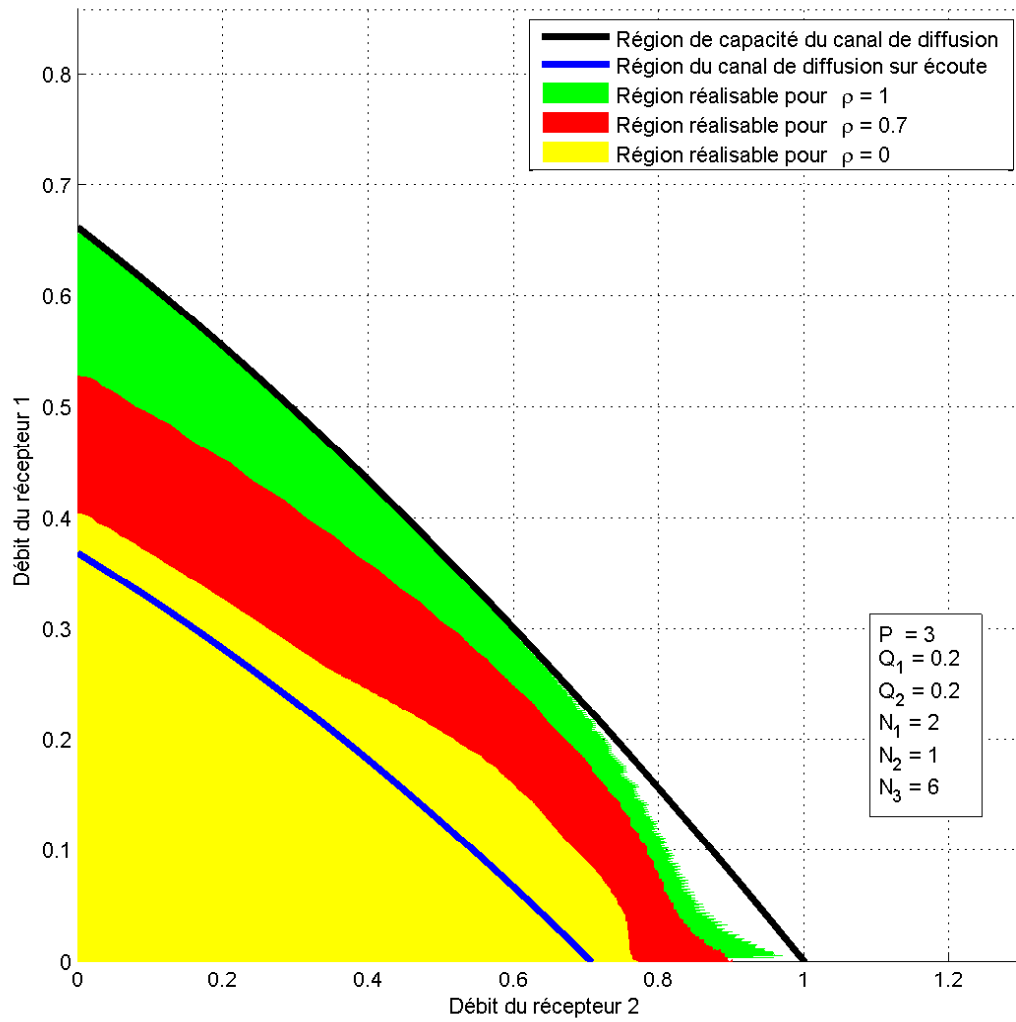


FIGURE 5.5 – Région des débits qui satisfont les équations du théorème 5.9 pour $Q_1 = Q_2 = 0.2$ et trois types de corrélations $\rho \in \{0, 0.7, 1\}$. Les débits appartenant à l’enveloppe convexe de cette région sont réalisables.

5.4 Niveaux min-max d'un jeu répété à quatre joueurs avec observation imparfaite

Au cours d'un jeu répété avec observation imparfaite, les joueurs observent les actions choisies par les autres joueurs à travers un canal appelé "structure d'observation". Le problème qui intéresse cette section est la caractérisation des équilibres du jeu répété avec observation imparfaite. Ce problème est étroitement lié à la caractérisation des débits réalisables à travers le canal d'observation noté \mathcal{T} . Les théorèmes de codage avec contraintes de sécurité autorisent un groupe de joueurs à coordonner leurs suites d'actions sans qu'un autre joueur puisse deviner cette coordination. En effet, les propriétés de typicité nous permettent de décrire les suites d'actions coordonnées réalisables par le groupe de joueurs et la contrainte de sécurité nous permet de contrôler les croyances du joueur restant. Dans [36], les auteurs fournissent une caractérisation des niveaux min-max avec observation imparfaite à l'aide de l'entropie. L'étude du canal multi-utilisateur, décrit par la figure 5.2, nous permet de proposer une borne supérieure sur les niveaux min-max du jeu répété avec observation imparfaite. Le résultat d'atteignabilité donné par le théorème 5.6 nous propose un ensemble de corrélations admissibles pour les actions des joueurs lorsque l'un des joueur encode et les deux autres joueurs décodent. Le principal résultat de cette section est le théorème 5.18 qui fournit une borne supérieure sur le niveaux min-max d'un joueur dont l'action n'influence pas la distribution des sorties du canal \mathcal{T} . Pour plus de détails sur le modèle des jeux répétés avec observation imparfaite, le lecteur est renvoyé vers [59].

Le modèle des niveaux min-max du jeu répété et le résultat de borne sur ces niveaux sont présentés respectivement aux sections 5.4.1 et 5.4.2. La démonstration du théorème 5.18 apparaît à la section 5.4.3.

5.4.1 Modèle des niveaux min-max du jeu répété

Le modèle du jeu répété avec observation imparfaite est défini à la section 2.5. Les niveaux min-max représentent une valeur d'utilité quantité à laquelle un joueur peut être puni par les autres joueurs. Dans le jeu en un coup, ce niveau change lorsque les joueurs qui punissent utilisent des actions mixtes indépendantes ou des actions mixtes corrélées (i.e. coordonnées). Dans le jeu de long terme avec observation imparfaite, un problème de corrélation apparaît. En effet, les joueurs peuvent utiliser la structure d'observation afin de générer des suites d'actions coordonnées. La formulation générale des niveaux min-max de long terme est un problème ouvert qui nous empêche d'obtenir une caractérisation générale des utilités d'équilibres. Nous savons cependant que les niveaux min-max du jeu répété se situent entre les niveaux min-max indépendants et corrélés du jeu en un coup [36]. Les niveaux min-max indépendants et ceux de long terme sont énoncés aux définitions 2.7 et 2.19. Nous présentons une vue d'ensemble des

définitions couramment utilisées pour les niveaux min-max.

Définition 5.11 Définissons les niveaux min-max en un coup, indépendants v_k^{ind} et corrélés v_k^{corr} pour le joueur $k \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} v_k^{ind} &= \min_{p_{-k} \in \prod_{j \neq i} \Delta(\mathcal{A}_j)} \max_{a_k \in \mathcal{A}_k} \mathbb{E}_{p_{-k}} u_k(a_k, a_{-k}), \\ v_k^{corr} &= \min_{p_{-k} \in \Delta(\mathcal{A}_{-k})} \max_{a_k \in \mathcal{A}_k} \mathbb{E}_{p_{-k}} u_k(a_k, a_{-k}). \end{aligned}$$

Notons que la fonction $\mathbb{E}_{p_{-k}} u_k(a_k, a_{-k})$ est linéaire en la variable $a_k \in \mathcal{A}_k$. Le maximum $\max_{p_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)} \mathbb{E}_{p_{-k}} u_k(a_k, a_{-k})$ pris sur les actions mixtes $p_k \in \Delta(\mathcal{A}_k)$ est donc égale au maximum $\max_{a_k \in \mathcal{A}_k} \mathbb{E}_{p_{-k}} u_k(a_k, a_{-k})$ pris sur les actions pures $a_k \in \mathcal{A}_k$. Les niveaux min-max du jeu répété sont défini par rapport aux stratégies $\tau_k \in \mathcal{T}_k$ et aux fonctions d'utilités γ_k^T et γ_k^λ définies à la section 2.4.1

Définition 5.12 Définissons les niveaux min-max du jeu répété fini en T étapes v_k^T et escompté avec taux λ noté v_k^λ :

$$v_k^T = \min_{\tau_{-k} \in \mathcal{T}_{-k}} \max_{\tau_k \in \mathcal{T}_k} \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}), \quad (5.57)$$

$$v_k^\lambda = \min_{\tau_{-k} \in \mathcal{T}_{-k}} \max_{\tau_k \in \mathcal{T}_k} \gamma_k^\lambda(\tau_k, \tau_{-k}). \quad (5.58)$$

Le min-max uniforme, noté v_k^∞ du joueur $k \in \mathcal{K}$ est défini par les conditions suivantes :

- Les joueurs $j \neq k \in \mathcal{K}$ garantissent $v \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau_{-k}, \exists \bar{T} \in \mathbb{N}, \forall \tau_k, \forall T \geq \bar{T} \quad \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}) \leq v + \varepsilon, \quad (5.59)$$

- Le joueur $k \in \mathcal{K}$ défend $v \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \tau_{-k}, \exists \tau_k, \exists \bar{T} \in \mathbb{N}, \forall T \geq \bar{T} \quad \gamma_k^T(\tau_k, \tau_{-k}) \geq v - \varepsilon, \quad (5.60)$$

- Le min-max uniforme, s'il existe, est $v_k^\infty \in \mathbb{R}$ tel que les joueurs $j \neq k \in \mathcal{K}$ garantissent $v_k^\infty \in \mathbb{R}$ et le joueur $k \in \mathcal{K}$ défend $v_k^\infty \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.13 ([36]) Les niveaux min-max de long terme sont inférieurs au niveau min-max indépendant et supérieurs au niveau min-max corrélé.

$$v_k^{corr} \leq v_k^T \leq v_k^{ind}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall T \geq 1, \quad (5.61)$$

$$v_k^{corr} \leq v_k^\lambda \leq v_k^{ind}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall \lambda \in]0, 1], \quad (5.62)$$

$$v_k^{corr} \leq v_k^\infty \leq v_k^{ind}, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (5.63)$$

Le lecteur est renvoyé à [36] pour des exemples illustrant les différents niveaux min-max.

5.4.2 Résultat de borne supérieure sur les niveaux min-max

Considérons un jeu répété à quatre joueurs avec observation imparfaite. Nous proposons une borne supérieure sur les niveaux min-max du joueur J_4 . Cette borne utilise le théorème 5.6 et la notion d'entropie pour capturer les propriétés des statistiques du canal \mathcal{T} .

Notons $a_k^n = (a_k(1), \dots, a_k(n))$ la suite des actions a_k du joueur $k \in \mathcal{K}$ de la première étape jusqu'à l'étape $n \geq 1$, $a_{123} = (a_1, a_2, a_3)$ le triplet des actions, $a_{123}^n = (a_1^n, a_2^n, a_3^n)$ le triplet des suites d'actions et $\mathcal{A}_{123} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3$ l'ensemble produit, τ_{123} la stratégie conjointe des joueurs J_1 , J_2 et J_3 . Notons $\mathcal{P} \in \Delta(\mathcal{X})$ la distribution de probabilités sur l'ensemble \mathcal{X} , $\Delta(\mathcal{X})$ l'espace des distributions de probabilités et $\mathcal{X}_{123} = \prod_{i=1,2,3} \Delta(\mathcal{A}_i)$ le produit des distributions de probabilités indépendantes sur les actions des joueurs. Soit \tilde{Q} est une distribution de probabilités sur un ensemble contenant \mathcal{X} et \mathcal{Y} . La notation $H_{\tilde{Q}}(\mathbf{x})$ désigne l'entropie de la variable aléatoire \mathbf{x} dont la distribution de probabilité est donnée par la marginale de \tilde{Q} sur l'ensemble \mathcal{X} . La notation $I_{\tilde{Q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ désigne l'information mutuelle des variables aléatoires \mathbf{x} et \mathbf{y} dont la distribution conjointe est donnée par la marginale de \tilde{Q} sur l'ensemble $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Définition 5.14 Définissons $\mathbb{Q}_1 \subset \Delta(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3)$ l'ensemble des distributions de probabilités tel que pour tout $Q_1 \in \mathbb{Q}_1$ il existe un couple de variables aléatoires $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ sur les ensembles $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ et une distribution de probabilités

$$\tilde{Q}_1 \in \Delta(\mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 \times \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3 \times \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_4), \quad (5.64)$$

satisfaisant le système des deux équations suivantes :

- Les conditions de marginalisation :

$$\sum_{u,s} \tilde{Q}_1(u, a_{123}, s) = Q_1(a_{123}) \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1(u, a_{123}, s) &= \mathcal{P}(a_2, a_3) \times \mathcal{P}(u_2, u_3 | a_2, a_3) \\ &\times \mathcal{P}(a_1 | u_2, u_3, a_2, a_3) \\ &\times \mathcal{T}(s_2, s_3, s_4 | a_1, a_2, a_3). \end{aligned} \quad (5.66)$$

- Les conditions d'entropie :

$$\begin{aligned} H_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{a}_2) &\leq I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_2; \mathbf{s}_2, \mathbf{a}_2) \\ &\quad - \max(I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_2; \mathbf{s}_4), I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)), \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} H_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{a}_3) &\leq I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_3; \mathbf{s}_3, \mathbf{a}_3) \\ &\quad - \max(I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_3; \mathbf{s}_4), I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_3; \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)), \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} H_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{a}_2) + H_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{a}_3) &\leq I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_2; \mathbf{s}_2, \mathbf{a}_2) + I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_3; \mathbf{s}_3, \mathbf{a}_3) - I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3) \\ &\quad - \max(I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{s}_4), I_{\tilde{Q}_1}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3; \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)). \end{aligned} \quad (5.69)$$

De manière similaire, nous définissons \mathbb{Q}_2 (resp. \mathbb{Q}_3), le sous-ensemble de $\Delta(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3)$ lorsque le joueur J_2 (resp. le joueur J_3) est l'encodeur du canal décrit par la figure 5.2. Pour ce faire, il suffit d'invertir les variables aléatoires $\mathbf{a}_1, \mathbf{s}_1$ du joueur J_1 avec $\mathbf{a}_2, \mathbf{s}_2$ (resp. $\mathbf{a}_3, \mathbf{s}_3$) du joueur J_2 (resp. J_3) dans les équations précédentes.

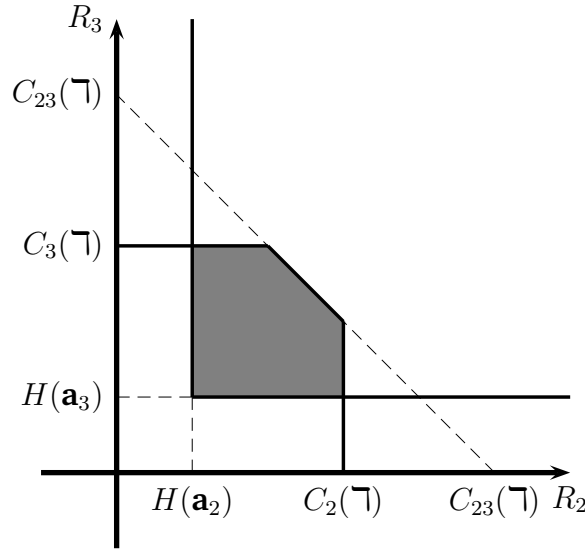


FIGURE 5.6 – Les conditions (5.70)-(5.72) sont vérifiées si la partie grisée est non-vide. Le codage source-canal conjoint avec les débits $H(\mathbf{a}_2), H(\mathbf{a}_3)$ et les capacités $C_2(\Gamma), C_3(\Gamma), C_{23}(\Gamma)$ est donc réalisable.

Les conditions de marginalisation (5.65)-(5.66) imposent que la distribution \tilde{Q}_1 respecte les distributions marginales Q_1 et Γ sur les actions et les signaux reçus par les joueurs. Les conditions d'entropie (5.67)-(5.69) correspondent au résultat d'atteignabilité de codage source-canal conjoint pour deux sources d'information corrélées et un canal de diffusion avec deux récepteurs décrit par la figure 5.7. Le problème de codage source-canal conjoint, introduit par Shannon dans [65], est présenté à la section A.5. Si la région des débits réalisables (R_2^s, R_3^s) pour les sources d'action \mathbf{a}_2 et \mathbf{a}_3 s'intersecte avec la région des débits réalisables (R_2^c, R_3^c) pour le canal Γ , alors les sources d'information \mathbf{a}_2 et \mathbf{a}_3 peuvent être transmises aux joueurs J_2 et J_3 à travers le canal Γ et reconstruites avec une probabilité d'erreur arbitrairement faible (voir la figure 5.7). Formellement, cette condition s'écrit à l'aide des notations $C_2(\Gamma)$ (resp. $C_3(\Gamma)$, resp. $C_{23}(\Gamma)$) pour la capacité du canal Γ entre le joueur J_1 et le joueur J_2 (resp. et le joueur J_3 , resp. et les joueurs J_2 et J_3) et $H(\mathbf{a}_2)$ (resp. $H(\mathbf{a}_3)$) pour l'entropie de la source \mathbf{a}_2 (resp. \mathbf{a}_3) c'est à dire la

borne minimale sur le débit R_2^s (resp. R_3^s) de la source.

$$H(\mathbf{a}_2) \leq R_2^s \leq R_2^c \leq C_2(\Upsilon), \quad (5.70)$$

$$H(\mathbf{a}_3) \leq R_3^s \leq R_3^c \leq C_3(\Upsilon), \quad (5.71)$$

$$H(\mathbf{a}_2) + H(\mathbf{a}_3) \leq R_2^s + R_3^s \leq R_2^c + R_3^c \leq C_{23}(\Upsilon). \quad (5.72)$$

La figure 5.6 illustre une situation où les conditions (5.70)-(5.72) sont vérifiées et pour laquelle le codage source-canal conjoint est réalisable. Ces conditions ne sont pas néces-

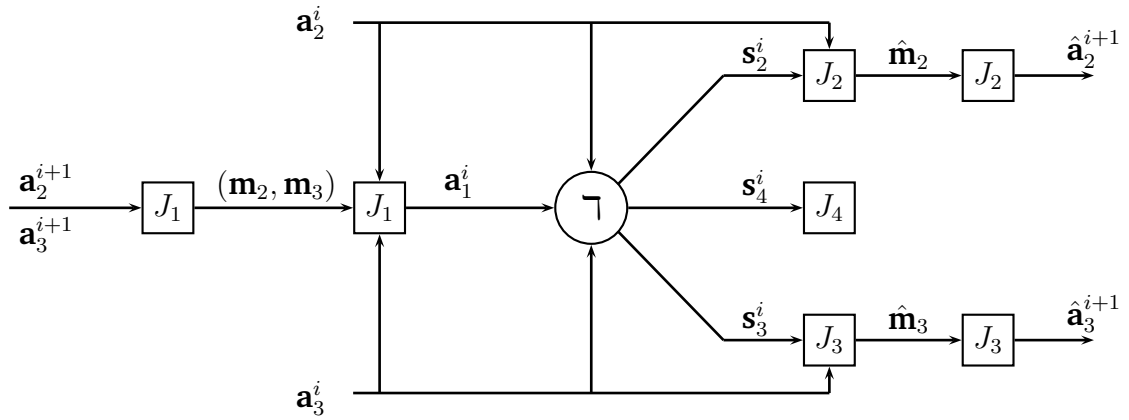


FIGURE 5.7 – Schéma du codage source-canal conjoint utilisé pour transmettre aux joueurs J_2 et J_3 , à travers les actions a_1^i du joueur J_1 au sous-bloc \mathcal{N}_j^i , les suites d'actions futures a_2^{i+1} et a_3^{i+1} des joueurs J_2 et J_3 au sous-bloc \mathcal{N}_j^{i+1} .

saires mais elles sont suffisantes. En conclusion, une distribution $Q_1 \in \Delta(\mathcal{A}_{123})$ appartenant au sous-ensemble \mathbb{Q}_1 est réalisable lorsque le joueur J_1 encode et les joueurs J_2 et J_3 décodent. Le même raisonnement est valable pour \mathbb{Q}_2 et \mathbb{Q}_3 lorsque les indices des joueurs sont permutés.

Définition 5.15 Considérons le système de communication décrit par la figure 5.7 où le joueur J_1 encode et les joueurs J_2 et J_3 décodent. Définissons un n -code comme un triplet de fonctions :

$$f_1 : \mathcal{A}_2^n \times \mathcal{A}_3^n \longrightarrow \mathcal{A}_1^n, \quad (5.73)$$

$$g_2 : \mathcal{S}_2^n \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}_2^n, \quad (5.74)$$

$$g_3 : \mathcal{S}_3^n \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}_3^n. \quad (5.75)$$

La probabilité d'erreur associée au n -code est définie comme suit.

$$\mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}\left((\mathbf{a}_2^n, \mathbf{a}_3^n) \neq (\hat{\mathbf{a}}_2^n, \hat{\mathbf{a}}_3^n)\right). \quad (5.76)$$

Théorème 5.16 (Cinquième contribution) *Considérons le problème de communication décrit par la figure 5.7. Supposons que $Q \in \mathbb{Q}_1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un n -code lorsque le joueur J_1 encode et les joueurs J_2 et J_3 décotent, tel que :*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e^n &\leq \varepsilon. \\ \frac{I_{\tilde{Q}}(\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3; \mathbf{s}_4^n)}{n} &\leq \varepsilon, \\ \mathcal{P}\left((\mathbf{a}_2^{i+1}, \mathbf{a}_3^{i+1}, \mathbf{a}_1^i, \mathbf{a}_2^i, \mathbf{a}_3^i, \mathbf{s}_2^i, \mathbf{s}_3^i, \mathbf{s}_4^i) \in A_\varepsilon^{*n}(\tilde{Q})\right) &\geq 1 - \mathcal{P}_e^n. \end{aligned}$$

où \tilde{Q} satisfait les conditions de marginalisation (5.65)-(5.66) et d'entropie (5.67)-(5.69).

Définition 5.17 Définissons \mathbb{Q}_{123} l'enveloppe convexe de l'union des distributions atteignables lorsque l'un des joueurs est l'encodeur ou lorsque chaque joueur joue une stratégie mixte :

$$\mathbb{Q}_{123} = \text{conv}[\mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2 \cup \mathbb{Q}_3 \cup \mathcal{X}_{123}] \subset \Delta(\mathcal{A}_{123}).$$

Le théorème 5.16 est une combinaison du théorème de codage de source de Shannon [65], et du théorème 5.6 où \mathbf{a}_2^i et \mathbf{a}_3^i sont les suites d'états du canal Υ , \mathbf{a}_1^i est la suite d'entrées, \mathbf{s}_2^i et \mathbf{s}_3^i sont les suites de sorties des récepteurs légitimes et \mathbf{s}_4^i est la suite de sorties de l'espion. Le codage de source encode les suites d'actions futures \mathbf{a}_2^{i+1} et \mathbf{a}_3^{i+1} sur des messages \mathbf{m}_2 et \mathbf{m}_3 avec un débit de source R_2^s et R_3^s . Ces messages peuvent être transmis à travers le canal Υ si les débits de la sources sont inférieurs aux capacités $C_2(\Upsilon)$ et $C_3(\Upsilon)$ du canal. Ce théorème 5.16 décrit un ensemble de corrélations réalisables à travers le système de communication décrit par la figure 5.7. Ce résultat nous permet de démontrer le théorème 5.18. Ce dernier énonce que s'il existe des variables auxiliaires \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 ainsi qu'une distribution \tilde{Q}_1 qui satisfait les conditions de marginalisation (5.65)-(5.66) et d'entropie (5.67)-(5.69), alors les joueurs J_1 , J_2 et J_3 peuvent corréler secrètement leurs suites d'actions selon la distribution empirique Q_1 .

Théorème 5.18 (Cinquième contribution) *Supposons que la probabilité de transition Υ ne dépende pas des actions du joueur J_4 .*

$$\Upsilon(s_1, s_2, s_3, s_4 | a_1, a_2, a_3, a_4) = \Upsilon(s_1, s_2, s_3, s_4 | a_1, a_2, a_3), \quad \forall a_k, s_k, \quad k \in \mathcal{K}.$$

Le niveau min-max uniforme v_4^∞ du joueur J_4 pour le jeu répété avec observation imparfaite est borné supérieurement par la quantité suivante :

$$v_4^\infty \leq \min_{Q \in \mathbb{Q}_{123}} \max_{a_4 \in \mathcal{A}_4} \mathbb{E}_Q u_4(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, a_4) = \nu.$$

Ce théorème a été présenté à la conférence "Games Toulouse 2011" et s'inscrit dans la littérature impulsée par [36]. Un groupe de joueurs se coordonne à travers les suites des signaux reçus de manière à punir un autre joueur à son niveau min-max. Les outils de la théorie de Shannon servent à caractériser les niveaux min-max dans les jeux répétés avec observation imparfaite. La borne de l'équation (5.77) n'est pas optimale puisque le schéma de communication décrit par la figure 5.7 contient plusieurs sous-problèmes qui ne sont pas résolus. Le canal de diffusion, présenté à la section A.9 est contenu dans notre modèle et sa région de capacité n'est pas connue à ce jour. La démonstration du théorème 5.18 est inspirée des articles [35] et [36]. Nous montrons que les joueurs J_1 , J_2 et J_3 possèdent une stratégie τ_{123}^* telle que la distribution empirique des actions et des croyances du joueur punit, converge faiblement vers la distribution de probabilité $Q^* \in \mathbb{Q}_{123}$ qui minimise l'équation 5.77.

5.4.3 Démonstration du théorème 5.18

5.4.3.1 Résumé de la démonstration

Le théorème 5.6 nous permet d'élaborer une borne supérieure sur les niveaux min-max de long terme. Le schéma de codage que nous présentons à la section 5.2.3 est adapté afin que les joueurs J_1 , J_2 et J_3 puissent garantir la valeur ν . La stratégie de ces joueurs est indépendante des actions du joueur J_4 et consiste à jouer, de bloc en bloc, un schéma de codage source-canal conjoint. En effet, le résultat de [65] pour le codage de source se combine avec notre théorème 5.6 pour déterminer les distributions empiriques sur les actions qui sont réalisables. D'intéressantes propriétés sont démontrées concernant la probabilité d'erreur, la distribution empirique des suites de symboles et le taux d'incertitude du joueur J_4 , vu comme un espion.

Le théorème 5.18 s'appuie sur les propriétés suivantes.

- La distribution empirique des suites d'actions des joueurs J_1 , J_2 et J_3 converge faiblement vers la distribution désirée $Q^* \in \mathbb{Q}_{123}$.
- La distribution empirique des suites de croyances du joueur J_4 converge faiblement vers la distribution désirée $Q^* \in \mathbb{Q}_{123}$.

Ces résultats intermédiaires nous permettent de démontrer que les joueurs J_1 , J_2 et J_3 garantissent le niveau min-max ν pour le jeu répété avec observation imparfaite.

5.4.3.2 Stratégie de codage τ_{123} pour les joueurs J_1 , J_2 et J_3

Nous présentons la stratégie des joueurs J_1 , J_2 et J_3 qui garantit la valeur ν . Notons $Q^* \in \mathbb{Q}_{123}$ la distribution qui réalise le minimum dans l'équation 5.77. L'ensemble \mathbb{Q}_{123} est défini comme l'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2 \cup \mathbb{Q}_3 \cup \mathcal{X}_{123}$. Sans perte de généralité, nous supposons que la distribution $Q^* \in \mathbb{Q}_{123}$ est une combinaison convexe,

$$Q^* = \sum_{h \in \mathcal{H}} \alpha_h Q_h^* \in \mathbb{Q}_{123}. \quad (5.77)$$

avec pour tout $h \in \mathcal{H}$, la distribution Q_h^* appartient à l'ensemble $\mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2 \cup \mathbb{Q}_3 \cup \mathcal{X}_{123}$. L'ensemble des actions \mathcal{A}_{123} est discret et fini, la dimension du simplexe $\Delta(\mathcal{A}_{123})$ est donc finie. Le théorème de Carathéodory conclut qu'il existe une combinaison convexe d'un nombre fini d'éléments $j \in \{0, \dots, J\}$, avec $|J| < \infty$ telle que,

$$Q^* = \sum_{j=1}^J \alpha_j Q_j^* \in \mathbb{Q}_{123}, \quad \sum_{j=1}^J \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j \in \{0, \dots, J\}. \quad (5.78)$$

avec pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, la distribution Q_j^* appartient à l'ensemble $\mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2 \cup \mathbb{Q}_3 \cup \mathcal{X}_{123}$. Les suites d'actions des joueurs J_1 , J_2 et J_3 sont divisées en J blocs de longueur N_j tel que la longueur totale $N = \sum_{j=1}^J N_j$ satisfasse la condition $\alpha_j = \frac{N_j}{N}$. Au cours du bloc $j \in \{1, \dots, J\}$, les joueurs J_1 , J_2 et J_3 mettent en œuvre un schéma de codage pour lequel la distribution empirique des actions est proche de Q_j^* . Fixons un bloc j et supposons, sans perte de généralité, que $Q_j^* \in \mathbb{Q}_1$. Cela signifie que la distribution empirique Q_j^* est atteignable par les joueurs lorsque le joueur J_1 encode et que les joueurs J_2 et J_3 décodent. Le bloc N_j est divisé en $I + 1$ sous-blocs \mathcal{N}_j^i de longueur N_j^i avec $i = \{0, \dots, I\}$. Nous avons donc $N_j = \sum_{i=0}^I N_j^i$ et notons $N_j^* = \sum_{i=1}^I N_j^i$. Notons a_k^j la suite d'actions du joueur $k \in \mathcal{K}$ durant le bloc $j \in \{1, \dots, J\}$, a_k^{*j} la même suite d'actions sans les étapes du premier sous-bloc \mathcal{N}_j^0 et a_k^i la suite d'actions du joueur $k \in \mathcal{K}$ lors du sous-bloc $i \in \{0, \dots, I\}$ où l'index du bloc $j \in \{1, \dots, J\}$ est implicite. Nous présentons le schéma de codage sur le bloc j qui permet aux joueurs d'atteindre Q_j^* . Un argument de partage temporel sera ensuite suffisant pour montrer que Q^* est atteignable.

Le schéma de codage sur le bloc j se déroule de la manière suivante. Le joueur J_1 tire une suite de N_j^* actions conjointes (a_2^{*j}, a_3^{*j}) . Il transmet la composante a_2^{*j} (resp. a_3^{*j}) au joueur J_2 (resp. J_3). Durant le premier bloc, les joueurs J_2 et J_3 jouent une stratégie mixte arbitraire. Notons $Q_j^0 \in \Delta(\mathcal{A}_{123})$ la distribution i.i.d. induite sur les actions du premier sous-bloc \mathcal{N}_j^0 . Pour chaque sous-bloc $i \in \{1, \dots, I\}$, le joueur J_1 utilise ses propres actions a_1^i pour transmettre les suites d'actions (a_2^{i+1}, a_3^{i+1}) que les joueurs J_2 et J_3 joueront au sous-bloc suivant \mathcal{N}_j^{i+1} . Le schéma de codage est conçu de manière à ce que les actions du joueur J_1 soient corrélées avec celles des joueurs J_2 et J_3 . Les éventuelles déviations des joueurs ne sont pas considérées dans cette section. Notre objectif est de

montrer l'influence de la structure d'observation \mathcal{T} sur la capacité, qu'ont les joueurs, de coordonner les suites d'actions.

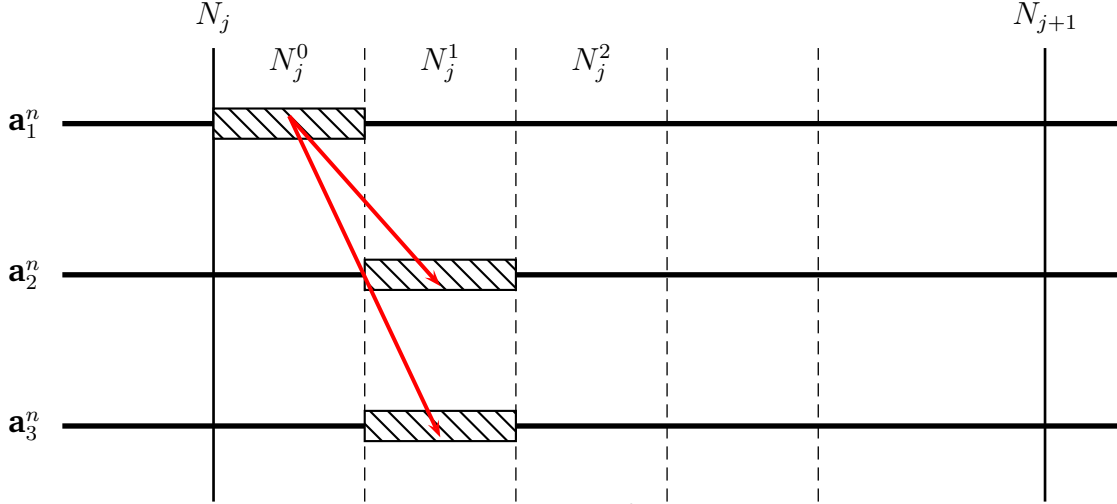


FIGURE 5.8 – Le joueur J_1 utilise ses actions a_1^0 pour transmettre au joueurs J_2 et J_3 , durant le sous-bloc N_j^0 , les suites d'actions (a_2^1, a_3^1) qu'ils joueront au sous-bloc suivant N_j^1 .

Pour chaque sous-bloc $i \in \{1, \dots, I\}$, le schéma de codage est la concaténation du schéma de codage de source de Shannon [65], [18] et du schéma de codage canal étudié section 5.2.3. Le codage de source consiste à encoder les suites d'actions a_2^i qui sont typiques grâce à l'index $m_2 \in M_2$ de l'ensemble des suites typiques. Les contraintes d'entropie (5.67 - 5.69) dans la définition de \mathbb{Q}_{123} assurent que la suite d'actions a_2^i du joueur J_2 peut être envoyée sur le canal d'observation \mathcal{T} et reconstruite par J_2 avec une probabilité d'erreur arbitrairement faible. Le même raisonnement s'applique aux suites d'actions a_3^i du joueur J_3 .

5.4.3.3 Suites de croyances du joueur J_4 et leurs distributions empiriques

Supposons qu'au bloc j et sous-bloc i , le joueur J_1 encode selon la distribution Q_j^* . À chaque étape $t \geq 1$, le joueur J_4 ré-évalue la distribution \bar{Q}_{123}^t empirique des suites d'actions $a_{123}(t)$ des joueurs J_1, J_2 et J_3 en fonction de leurs stratégies τ_1, τ_2, τ_3 et des signaux h_4^{t-1} reçus aux étapes précédentes. Ce phénomène est communément appelé "la mise à jour des croyances". Notons s_4^{i-1} la suite des signaux reçus par le joueur J_4 durant le sous-bloc \mathcal{N}_j^{i-1} et $s_4^i(1), \dots, s_4^i(t-1)$ la suite des signaux reçus jusqu'à l'étape $t-1$ du sous-bloc \mathcal{N}_j^i . L'indice j du bloc est implicite.

Définition 5.19 La croyance $\bar{Q}_{123}^t \in \Delta(\mathcal{A})$ du joueur J_4 à l'étape t du bloc j et sous-bloc

i est définie comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{Q}}_{123}^t(\mathbf{a}_{123}) &= \mathbb{P}[(\mathbf{a}_1^i(t), \mathbf{a}_2^i(t), \mathbf{a}_3^i(t)) = a_{123} | h_4^{t-1}, \tau_1, \tau_2, \tau_3] \\ &= \mathbb{P}[(\mathbf{a}_1^i(t), \mathbf{a}_2^i(t), \mathbf{a}_3^i(t)) = a_{123} | s_4^{i-1}, s_4^i(1), \dots, s_4^i(t-1), \tau_1, \tau_2, \tau_3].\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{A}_{123}^{\otimes \mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies d'actions et \mathcal{A}_{123}^i l'ensemble des suites d'actions durant le sous-bloc i . La stratégie conjointe τ_{123} induit une distribution de probabilités $\mathcal{P}_{\tau_{123}} \in \Delta(\mathcal{A}_{123}^{\otimes \mathbb{N}})$ sur les suites d'actions. À la fin du sous-bloc i , le quatrième joueur observe une suite de signaux s_4^i . Connaissant la stratégie τ_{123} , il ré-évalue une suite de croyances d'étapes $\mathcal{Q}_{123} \in \Delta(\mathcal{A}_{123}^{i+1})$ à propos de la suite des actions des autres joueurs au cours du bloc $i + 1$. Notons $\mathcal{P}_{123}^t \in \Delta(\mathcal{A}_{123})$ (resp. $\mathcal{Q}_{123}^t \in \Delta(\mathcal{A}_{123})$) la probabilité marginale induite par \mathcal{P}_{123} (resp. \mathcal{Q}_{123}) durant l'étape $t \geq 1$. Les distributions empiriques espérées (ou encore les distributions de probabilités moyennes) des actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}(\cdot)$ et des croyances $\bar{\mathcal{Q}}_{123}(\cdot)$ durant les étapes du sous-bloc i sont évaluées comme suit :

$$\bar{\mathcal{P}}_{123}(\cdot) = \frac{1}{N_j^i} \sum_{t=1}^{N_j^i} \mathcal{P}_{123}^t(\cdot) = \frac{1}{N_j^i} \sum_{t=1}^{N_j^i} \sum_{a_{123}^i} \mathcal{P}_{123}(a_{123}^i) \mathbb{1}(a_{123}(t) = \cdot) \quad (5.79)$$

$$= \sum_{a_{123}^i} \mathcal{P}_{123}(a_{123}^i) \frac{N(\cdot | a_{123}^i)}{N_j^i} = \mathbb{E}_{\mathcal{P}_{123}} \left[\frac{N(\cdot | a_{123}^i)}{N_j^i} \right] \in \Delta(\mathcal{A}_{123}), \quad (5.80)$$

$$\bar{\mathcal{Q}}_{123}(\cdot) = \frac{1}{N_j^i} \sum_{t=1}^{N_j^i} \mathcal{Q}_{123}^t(\cdot) = \frac{1}{N_j^i} \sum_{t=1}^{N_j^i} \sum_{a_{123}^i} \mathcal{Q}_{123}(a_{123}^i) \mathbb{1}(a_{123}(t) = \cdot) \quad (5.81)$$

$$= \sum_{a_{123}^i} \mathcal{Q}_{123}(a_{123}^i) \frac{N(\cdot | a_{123}^i)}{N_j^i} = \mathbb{E}_{\mathcal{Q}_{123}} \left[\frac{N(\cdot | a_{123}^i)}{N_j^i} \right] \in \Delta(\mathcal{A}_{123}). \quad (5.82)$$

Nous montrons, dans les sections 5.4.3.4 et 5.4.3.5, que les distributions empiriques espérées $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ et $\bar{\mathcal{Q}}_{123}$ convergent faiblement vers la distribution de probabilités $\bar{\mathcal{Q}}_j$ suivante :

$$\bar{\mathcal{Q}}_j = \frac{N_j - N_j^0}{N_j} \mathcal{Q}_j^* + \frac{N_j^0}{N_j} \mathcal{Q}_j^0. \quad (5.83)$$

5.4.3.4 Sur le bloc j , la distribution de probabilités moyenne des actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ converge faiblement vers la distribution optimale $\bar{\mathcal{Q}}_j$

Lemme 5.20 *Considérons le bloc d'étapes j . La distribution de probabilités moyenne des actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ converge faiblement vers $\bar{\mathcal{Q}}_j$ lorsque la longueur N_j^i des sous-blocs $i = 0, \dots, I$*

tend vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un \bar{n} tel que pour tout $N_j^i \geq \bar{n}$ nous avons :

$$|\mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}_j}(g)| \leq \varepsilon, \quad \forall g : \Delta(\mathcal{A}_{123}) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue.} \quad (5.84)$$

Démonstration. Notons e l'événement d'erreur du schéma de codage récursif défini ci-dessus, de sous-bloc en sous-bloc à l'intérieur du bloc j et \mathcal{P}_e^j la probabilité associée. Nous avons $\mathcal{P}_e^j \leq 1 - (1 - \varepsilon)^I$, I étant le nombre de sous-blocs où les joueurs communiquent. Pour tout $\bar{\varepsilon} > 0$, il existe un $\bar{\alpha} > 0$ tel que :

$$|\mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}_j}(g)| \leq \bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} \|\bar{\mathcal{P}}_{123} - \bar{Q}_j\|_1 \quad (5.85)$$

$$\leq \bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} \mathbb{E} \left\| \frac{N(\cdot | a_{123}^j)}{N_j^i} - \bar{Q}_j \right\|_1 \quad (5.86)$$

$$\leq \bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} (2A_{123}\mathcal{P}_e^j + (1 - \mathcal{P}_e^j)\varepsilon) \quad (5.87)$$

$$\leq \bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} (2A_{123}(1 - (1 - \varepsilon)^I) + \varepsilon) = \tilde{\varepsilon}(I). \quad (5.88)$$

L'inégalité est due à la continuité de g sur l'ensemble compact et l'évaluation de la norme $|\mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}_j}(g)|$ lorsque $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ est proche de \bar{Q}_j ou pas. La seconde inégalité vient du fait que $\mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}}(\frac{N(\cdot | a_{123}^j)}{N_j^i}) = \bar{\mathcal{P}}_{123}$. La troisième inégalité est due au fait que si aucune erreur n'apparaît dans le schéma de codage récursif, alors les suites d'actions sont ε -typiques avec la distribution \bar{Q}_j durant le bloc j (voir le théorème 5.16). La quatrième inégalité vient de la borne sur la probabilité d'erreur durant le schéma de codage récursif $\mathcal{P}_e^j \leq (1 - (1 - \varepsilon)^I)$ (voir le théorème 5.16). \square

5.4.3.5 Sur le bloc j , la distribution de probabilités moyenne des croyances \bar{Q}_{123} converge faiblement vers la distribution optimale \bar{Q}_j

Le joueur J_4 observe une suite de signaux et ré-évalue une suite de croyances d'étapes $(Q_{123}^t)_{t \geq 1}$. Montrons que le schéma de codage canal avec contrainte de sécurité (voir la condition 5.77 du théorème 5.16) empêche le joueur J_4 de prédire la suite des actions futures des joueurs J_1 , J_2 et J_3 . Plus précisément, nous montrons que l'espérance de la distribution empirique des croyances $\bar{Q}_{123} = \mathbb{E}_{Q_{123}}[\frac{N(\cdot | a_{123}^j)}{N_j^i}]$ converge faiblement vers \bar{Q}_j lorsque n tend vers l'infini.

Lemme 5.21 *Considérons le bloc d'étapes j . La distribution de probabilités moyenne des croyances \bar{Q}_{123} converge faiblement vers \bar{Q}_j lorsque la longueur N_j^i des sous-blocs $i = 0, \dots, I$ tend vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un \bar{n} tel que pour tout $N_j^i \geq \bar{n}$, nous avons :*

$$|\mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}_j}(g)| \leq \varepsilon, \quad \forall g : \Delta(\mathcal{A}_{123}) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue.} \quad (5.89)$$

Démonstration. Première étape. Montrons que les inégalités suivantes sont valides pour toute étape $t \geq 1$ et tout sous-bloc $i = 1, \dots, I$ du bloc j . Soient les distributions de probabilités P et Q . Nous notons $d(P||Q)$ la divergence de Kullback entre P et Q .

$$\mathbb{E}|g(\bar{Q}_{123}^t) - g(\bar{Q}_j)| \leq \bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} \mathbb{E}\|\bar{Q}_{123}^t - \bar{Q}_j\|_1 \quad (5.90)$$

$$\leq \bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} \sqrt{2 \ln 2 \mathbb{E}d(\bar{Q}_{123}^t || \bar{Q}_j)}. \quad (5.91)$$

La première inégalité vient du fait que g est uniformément continue ainsi que de l'évaluation de la norme $\mathbb{E}|g(\bar{Q}_{123}^t) - g(\bar{Q}_j)|$ lorsque \bar{Q}_{123}^t est proche de \bar{Q}_j ou pas. La seconde inégalité vient du lemme [11.6.1 pp. 370] de Cover et Thomas [18] ainsi que de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction concave $x \mapsto \sqrt{x}$.

Deuxième étape. Notons $\bar{Q}_j^{\star \otimes N_j^i}$ la probabilité N_j^i produit de \bar{Q}_j . La définition des croyances d'étapes implique que pour chaque sous-bloc $i+1$ avec $i = 1, \dots, I$:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \mathcal{N}_j^{i+1}} \mathbb{E}d(\bar{Q}_{123}^t || Q_j^\star) &= \sum_{t \in \mathcal{N}_j^i} \mathbb{E}d(\mathcal{P}(\mathbf{a}_{123}^{i+1}(t) | \mathbf{s}_4^i, \mathbf{s}_4^{i+1}(1), \dots, \mathbf{s}_4^{i+1}(t-1)) || Q_j^\star) \\ &\leq \sum_{t \in \mathcal{N}_j^{i+1}} \mathbb{E}d(\mathcal{P}(\mathbf{a}_{123}^{i+1}(t) | \mathbf{s}_4^i, \mathbf{a}_{123}^{i+1}(1), \dots, \mathbf{a}_{123}^{i+1}(t-1)) || Q_j^\star) \\ &= \mathbb{E}d\left(\mathcal{P}(\mathbf{a}_{123}^{i+1} | \mathbf{s}_4^i) || \bar{Q}_j^{\star \otimes N_j^{i+1}}\right) \\ &= \mathbb{E}d\left(\mathcal{P}(\mathbf{a}_{123}^{i+1} | \mathbf{s}_4^i) \otimes \mathcal{P}(\mathbf{s}_4^i) || \bar{Q}_j^{\star \otimes N_j^{i+1}} \otimes \mathcal{P}(\mathbf{s}_4^i)\right) \\ &= I(\mathbf{a}_{123}^{i+1}; \mathbf{s}_4^i) \leq I(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2; \mathbf{s}_4^i). \end{aligned}$$

La première égalité vient de la définition de croyance d'étape, la seconde vient de la convexité de la divergence de Kullback [18], la troisième vient de la règle de chaîne [18], la quatrième vient de la multiplication par la probabilité $\mathcal{P}(\mathbf{s}_4^i)$ ainsi que de la définition de l'information mutuelle. La dernière inégalité vient de la chaîne de Markov $\mathbf{a}_1^{i+1} - (\mathbf{a}_2^{i+1}, \mathbf{a}_3^{i+1}) - (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) - \mathbf{s}_4^i$. En effet, les dépendances entre variables s'écrivent comme suit :

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}_{123}^{i+1} | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{s}_4^i) = \mathcal{P}(\mathbf{a}_{123}^{i+1} | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2), \quad (5.92)$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{s}_4^i | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{a}_{123}^{i+1}) = \mathcal{P}(\mathbf{s}_4^i | \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2). \quad (5.93)$$

Troisième étape. Le théorème de codage 5.16 que nous avons démontré est utilisé pour évaluer une borne supérieure sur l'information mutuelle $I(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2; \mathbf{s}_4^i)$. Soit \mathcal{P}_e^i la probabilité qu'une erreur se produise dans le schéma de codage sur l'un des sous-blocs précédents $1, \dots, i-1$. D'après le théorème 5.16, si aucune erreur ne se produit dans les

sous-blocs précédents, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un (n, M) -code tel que le taux d'incertitude et la probabilité d'erreur sont bornés :

$$\frac{I_{\bar{Q}_j}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2; \mathbf{s}_4^i)}{N_j^i} \leq \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, I \quad (5.94)$$

$$\mathcal{P}_e^{N_j^i} \leq \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, I \quad (5.95)$$

La probabilité d'erreur \mathcal{P}_e^i est bornée par :

$$\mathcal{P}_e^i \leq 1 - (1 - \varepsilon)^i. \quad (5.96)$$

Donc pour tout $i = 1, \dots, I$, nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2; \mathbf{s}_4^i) &\leq \mathcal{P}_e^i N_j^i \log |S_4| + (1 - \mathcal{P}_e^i) I_{\bar{Q}_j}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2; \mathbf{s}_4^i) \\ &\leq (1 - (1 - \varepsilon)^i) N_j^i \log |S_4| + N_j^i \varepsilon \\ &\leq N_j^i ((1 - (1 - \varepsilon)^I) \log |S_4| + \varepsilon). \end{aligned}$$

Quatrième étape. Pour chaque bloc j et chaque sous-bloc $i = 1, \dots, I$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_j^i} \sum_{t \in N_j^i} \mathbb{E} |g(\bar{Q}_{123}^t) - g(Q_j^*)| &\leq \bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} \frac{1}{N_j^i} \sum_{t \in N_j^i} \sqrt{2 \ln 2 \mathbb{E} d(\bar{Q}_{123}^t \| Q_j^*)} \\ &\leq \bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} \sqrt{2 \ln 2 \frac{1}{N_j^i} \sum_{t \in N_j^i} \mathbb{E} d(\bar{Q}_{123}^t \| Q_j^*)} \\ &\leq \bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} \sqrt{2 \ln 2 ((1 - (1 - \varepsilon)^I) \log |S_4| + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

La première inégalité vient de l'égalité (5.97), la seconde vient de l'inégalité de Jensen pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et la troisième vient de la deuxième étape.

Cinquième étape. Pour chaque bloc j , nous avons le résultat de convergence faible qui suit :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}_j}(g)| &\leq \sum_{i=1}^I \frac{N_j^i}{N_j} \mathbb{E} |g(\bar{Q}_{123}^i) - g(Q_j^*)| + \frac{N_j^0}{N_j} \mathbb{E} |g(\bar{Q}_{123}^0) - g(Q_j^0)| \\ &\leq \sum_{i=1}^I \frac{N_j^i}{N_j} \frac{1}{N_j^i} \sum_{t \in N_j^i} \mathbb{E} |g(\bar{Q}_{123}^t) - g(Q_j^*)| + \frac{N_j^0}{N_j} \mathbb{E} |g(\bar{Q}_{123}^0) - g(Q_j^0)| \\ &\leq \frac{N_j - N_j^0}{N_j} (\bar{\varepsilon} + \frac{2\|g\|}{\bar{\alpha}} \sqrt{2 \ln 2 ((1 - (1 - \varepsilon)^I) \log |S_4| + \varepsilon)}) = \hat{\varepsilon}(I). \end{aligned}$$

Remarquons que $\mathbb{E}|g(\bar{Q}_{123}) - g(Q_j^0)| = 0$ sur le premier bloc, les croyances du joueur J_4 ne dépendent pas des signaux reçus. Donc les croyances restent égales à la probabilité à priori $\bar{Q}_{123}^0 = Q_j^0$. La convergence faible est assurée lorsque la longueur N_j^i tend vers $+\infty$, alors ε et $\hat{\varepsilon}$ tendent vers 0. Ceci conclue la démonstration du lemme 5.21. \square

5.4.3.6 Les distributions de probabilités moyenne des actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ et des croyances \bar{Q}_{123} convergent faiblement vers la distribution optimale \bar{Q}^*

Lemme 5.22 *Les distributions de probabilités moyenne des actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ et des croyances \bar{Q}_{123} convergent faiblement vers la distribution optimale \bar{Q}^* . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un \bar{n} tel que pour tout $N \geq \bar{n}$ nous avons :*

$$|\mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}^*}(g)| \leq \varepsilon, \quad \forall g : \Delta(\mathcal{A}_{123}) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, \quad (5.97)$$

$$|\mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}^*}(g)| \leq \varepsilon, \quad \forall g : \Delta(\mathcal{A}_{123}) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}. \quad (5.98)$$

Démonstration. Nous avons déjà montré que ces deux inégalités sont valides pour la distribution de probabilités moyenne sur les actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ et les croyances \bar{Q}_{123} durant le bloc j . Pour tout I et tout ε , il existe un \bar{n} tel que pour tout $n \geq \bar{n}$, nous avons :

$$|\mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}_j}(g)| \leq \tilde{\varepsilon}(I) \leq \varepsilon,$$

$$|\mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}_j}(g)| \leq \hat{\varepsilon}(I) \leq \varepsilon.$$

Durant le jeu en N étapes, les distributions de probabilités moyennes des actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ et des croyances \bar{Q}_{123} convergent faiblement vers \bar{Q} définie par :

$$\bar{Q} = \sum_{j=1}^J \frac{N_j}{N} \left(\frac{N_j - N_j^0}{N_j} Q_j^* + \frac{N_j^0}{N_j} Q_j^0 \right). \quad (5.99)$$

Nous avons les bornes suivantes :

$$|\mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}}(g)| \leq J\tilde{\varepsilon}(I) \leq J\varepsilon,$$

$$|\mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}}(g)| \leq J\hat{\varepsilon}(I) \leq J\varepsilon.$$

De plus, \bar{Q} converge fortement vers Q^* lorsque I tend vers $+\infty$. Donc pour tout ε , il existe I et \bar{n} tel que pour tout $N_j^i \geq \bar{n}$ nous avons,

$$|\mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{Q^*}(g)| \leq |\mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}}(g)| + |\mathbb{E}_{\bar{Q}}(g) - \mathbb{E}_{Q^*}(g)| \leq 2J\varepsilon,$$

$$|\mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{Q^*}(g)| \leq |\mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}}(g) - \mathbb{E}_{\bar{Q}}(g)| + |\mathbb{E}_{\bar{Q}}(g) - \mathbb{E}_{Q^*}(g)| \leq 2J\varepsilon.$$

Nous avons montré que la distribution de probabilités moyenne des actions $\bar{\mathcal{P}}_{123}$ et des croyances \bar{Q}_{123} converge faiblement vers la distribution optimale \bar{Q}^* . \square

5.4.3.7 Stratégie optimale du joueur J_4

Les actions du joueur J_4 n'influencent pas les stratégies des joueurs J_1 , J_2 et J_3 . La stratégie optimale pour le joueur J_4 est donc une meilleure réponse vis à vis des croyances (stratégie dite myope). Elle est définie comme suit :

$$\tau_4(\emptyset) \in \operatorname{argmax} \mathbb{E}_{\tau_{123}}[u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4)], \quad (5.100)$$

$$\tau_4(h_4^{t-1}) \in \operatorname{argmax} \mathbb{E}_{\tau_{123}}[u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4)|h_4^{t-1}], \quad \forall h_4^{t-1}. \quad (5.101)$$

Plus précisément, la stratégie optimale du joueur J_4 est seulement basée sur les croyances qui dépendent de la suite des signaux reçus $s_4^i, s_4^{i+1}(1), \dots, s_4^{i+1}(t-1)$. À chaque étape $t \geq 1$, le joueur J_4 choisit une stratégie optimale $a_4^t \in \mathcal{A}_4$ pour sa fonction d'utilité espérée, définie par rapport à la croyance d'étape \bar{Q}_{123}^t .

$$\max_{\tau_4} \gamma_4(\tau_{123}, \tau_4) \leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \max_{a_4^t \in \mathcal{A}_4} \mathbb{E}_{\tau_{123}}[u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4)|h_4^{t-1}], \quad (5.102)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \max_{a_4^t \in \mathcal{A}_4} \mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}^t}[u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4)]. \quad (5.103)$$

5.4.3.8 Démonstration du théorème 5.18

Il reste à remplacer la fonction continue $g : \Delta(\mathcal{A}_{123}) \rightarrow \mathbb{R}$ des lemmes 5.20 et 5.21 par les fonctions continues suivantes :

$$\begin{aligned} g(\bar{\mathcal{P}}_{123}) &= \mathbb{E}_{\bar{\mathcal{P}}_{123}} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4), \\ g(\bar{\mathcal{Q}}_{123}) &= \max_{\substack{a_4 \in \operatorname{argmax} \\ \mathbb{E}_{\bar{\mathcal{Q}}_{123}} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4)}} \mathbb{E}_{Q^*} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4). \end{aligned}$$

Pour tout ε , il existe un \bar{n} tel que pour tout $n \geq \bar{n}$,

$$\max_{\tau_4} \gamma_4(\tau_{123}, \tau_4) = \max_{\tau_4} \mathbb{E}_{\tau_{123}, \tau_4} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n u_4(\mathbf{a}_{123}^t, \mathbf{a}_4^t) \quad (5.104)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \max_{\substack{a_4^t \in \arg\max \\ \mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}^t} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4)}} \mathbb{E}_{\bar{P}_{123}^t} u_4(\mathbf{a}_{123}^t, a_4^t) \quad (5.105)$$

$$= \max_{\substack{a_4 \in \arg\max \\ \mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4)}} \mathbb{E}_{\bar{P}_{123}} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4) \quad (5.106)$$

$$\leq \max_{\substack{a_4 \in \arg\max \\ \mathbb{E}_{\bar{Q}_{123}} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4)}} \mathbb{E}_{Q^*} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4) + \varepsilon \quad (5.107)$$

$$\leq \max_{\substack{a_4 \in \arg\max \\ \mathbb{E}_{Q^*} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4)}} \mathbb{E}_{Q^*} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4) + 2\varepsilon \quad (5.108)$$

$$= \max_{a_4 \in \mathcal{A}_4} \mathbb{E}_{Q^*} u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4) + 2\varepsilon \quad (5.109)$$

$$= \min_{Q \in \mathcal{Q}_{123}} \max_{a_4 \in \mathcal{A}_4} \mathbb{E}_Q u_4(\mathbf{a}_{123}, a_4) + 2\varepsilon \quad (5.110)$$

$$= \nu + 2\varepsilon. \quad (5.111)$$

La première égalité découle de la définition des utilités de long terme. La seconde est valide car la meilleure réponse du joueur J_4 est la meilleure réponse myope. La troisième égalité est due à la définition de la distribution de probabilités moyenne induite sur les suites d'actions \bar{P}_{123} et de croyances \bar{Q}_{123} . La quatrième et la cinquième inégalité proviennent des lemmes 5.20, 5.21 et 5.22. La dernière inégalité découle de la définition de ν .

En conclusion, les joueurs J_1 , J_2 et J_3 possèdent une stratégie qui permet de corréliser les suites d'actions, de manière secrète vis à vis du joueur J_4 , et qui garantit la valeur suivante :

$$v_4^\infty \leq \max_{Q \in \mathcal{Q}_{123}} \min_{a_4 \in \mathcal{A}_4} \mathbb{E}_Q u_4(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, a_4) = \nu. \quad (5.112)$$

5.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre est consacré à l'application d'un résultat de codage canal au problème des niveaux min-max dans les jeux répétés avec observation imparfaite. L'ensemble des utilités d'équilibre des jeux répétés dépend des niveaux min-max. Ces derniers ne sont pas caractérisés lorsque les joueurs n'observent pas parfaitement les actions passées. La difficulté principale est de déterminer les corrélations entre les suites d'actions et les suites de signaux que permet de mettre en œuvre la structure d'observation \mathbb{T} des joueurs. La théorie de Shannon est l'outil approprié pour caractériser les corrélations

admissibles entre les suites de symboles d'une source d'information, de l'entrée, de la sortie du canal et de la source reconstruite. Nous utilisons les résultats de codage pour les canaux multi-utilisateurs et pour les sources corrélées afin de proposer un ensemble de suites de symboles corrélés admissibles à travers un système de communication. Ce résultat s'applique aux jeux répétés avec observation imparfaite lorsque les sources d'information sont des suites d'actions et le canal prend des actions $a_k \in \mathcal{A}_k$ en entrée et des signaux $s_k \in \mathcal{S}_k$ en sortie. Plus précisément, nous cherchons à caractériser les corrélations qu'un groupe de joueurs peut mettre en œuvre à travers un canal d'observation afin de punir, à son niveau min-max, un autre joueur. La caractérisation générale des niveaux min-max est un premier résultat vers la caractérisation des utilités d'équilibre dans un jeu répété avec observation imparfaite.

La première section 5.2.1 de ce chapitre consiste à démontrer un résultat d'atteignabilité pour le codage canal. Nous proposons une région des débits réalisables entre un encodeur et deux décodeurs en utilisant un canal de diffusion sur écoute avec des états asymétriques. Ce canal correspond à une situation de communication inspirée des jeux répétés avec observation imparfaite. En effet, les états du canal sont les actions des joueurs qui décodent l'information. Le canal est sur écoute puisque l'information transmise ne doit pas être dévoilée au joueur qui subit une punition. Ce modèle de canal contient plusieurs sous-problèmes ouverts en théorie de Shannon. Les débits atteignables ne sont pas caractérisés pour le canal de diffusion et le canal sur écoute avec état. Le problème du codage conjoint de sources corrélées sur un canal de diffusion n'est pas résolu. En conclusion, la région des débits réalisables que nous proposons n'est pas optimale. La deuxième section 5.3 est consacrée à l'étude du canal gaussien de diffusion sur écoute, avec des états asymétriques. Cette étude nous permet de développer une intuition à propos du rôle des variables aléatoires des états du canal. Les résultats numériques montrent que la région des débits réalisables augmente lorsque les états sont corrélés ou que leur variance augmente. La troisième section 5.4 est l'aboutissement de ce chapitre. Le résultat de codage canal énoncé ci-dessus se combine avec le résultat de codage de source de Shannon pour donner une borne supérieure sur les niveaux min-max d'un joueur. Le résultat de codage source et canal conjoint caractérise un système de contraintes entropiques caractérisant les distributions de symboles qui peuvent être mises en œuvre par l'encodeur et les décodeurs sans que l'observation de l'espion ne les trahisse. Une stratégie construite de bloc en bloc permet à l'encodeur de communiquer, à travers ses actions, les suites d'actions que les décodeurs utiliseront aux blocs suivants sans que le joueurs punit ne puisse les prévoir. Cette stratégie nous fournit une borne supérieure sur les niveaux min-max d'un jeu répété avec observation imparfaite.

Le problème étudié dans ce chapitre confirme les liens étroits, déjà remarqués dans [36], entre la théorie de Shannon et les niveaux min-max pour les jeux répétés avec observation imparfaite. En conclusion, le problème des niveaux min-max lorsque l'observation est imparfaite contient de nombreux problèmes ouverts en théorie de Shannon. Les problèmes de chacune de ces théories sont une source d'inspiration qui peut s'avérer fructueuse. Nous proposons plusieurs extensions à ce travail.

L'ENSEMBLE DES UTILITÉS D'ÉQUILIBRE D'UN JEU RÉPÉTÉ AVEC OBSERVATION IMPARFAITE DÉPEND DU CANAL D'OBSERVATION À TRAVERS DES CONTRAINTES D'ENTROPIE.

- Les résultats de théorie de Shannon, pourraient être approfondis. De nombreux problèmes en codage de source ou codage canal restent à résoudre : le canal de diffusion, le canal sur écoute avec état et le codage conjoint de sources corrélées sur un canal de diffusion.
- Le problème de l'observation imparfaite dans les jeux répétés fait intervenir des canaux de communication qui sont peu étudiés dans la littérature de la théorie de Shannon. Les relations réciproques entre les structures d'observation dans les jeux et les schémas de communication restent à approfondir.

Chapitre 6

Conclusion

6.1 Bilan

Cette thèse exploite les relations réciproques qui existent entre la théorie des jeux avec observation imparfaite et la théorie de l'information. Nous utilisons des théorèmes de codage afin de caractériser les utilités d'équilibre dans les jeux de long terme avec observation imparfaite des actions passées. Ces utilités d'équilibre et leurs stratégies associées permettent, en retour, de proposer des solutions explicites aux problèmes des communications décentralisées où les transmetteurs sont considérés comme des agents qui choisissent individuellement les paramètres de leur communication.

Nous rappelons, au chapitre 2, les principaux résultats de théorie des jeux sur lesquels nos travaux sont basés. Chaque concept d'équilibre est profondément relié aux hypothèses concernant l'information stratégique que possèdent les joueurs. Lorsque ceux-ci n'observent pas les actions passées, l'équilibre de Nash du jeu en un coup est la solution appropriée. L'utilité correspondante n'est généralement pas Pareto-optimale. L'équilibre du jeu répété est adéquat lorsque les joueurs observent parfaitement les actions passées. Dans certains cas, les utilités d'équilibre correspondantes sont optimales au sens de Pareto. Un modèle de jeu pertinent doit capturer le compromis optimal entre les hypothèses d'information réalistes et l'optimalité de la solution correspondante.

Nous étudions, au chapitre 3, le jeu du contrôle de puissance efficace du point de vue énergétique pour le canal à accès multiples. Chaque émetteur choisit une puissance afin de communiquer avec une station de base. La puissance de transmission altère, au niveau du récepteur, la qualité des communications des autres émetteurs. L'équilibre de Nash est adéquat, pour le jeu du contrôle de puissance, lorsque les joueurs n'observent aucune information sur les actions choisies par les autres joueurs. L'équilibre de Stackelberg est étudié lorsqu'un groupe de joueurs observe, avant de jouer, les actions choisies par les autres joueurs. Les équilibres du jeu répété correspondent à la situation où les joueurs observent les actions passées à travers un canal d'observation. Les uti-

lités d'équilibre du jeu répété sont plus intéressantes pour chacun des joueurs que les utilités d'équilibre de Nash ou de Stackelberg. La qualité de l'observation des joueurs permet d'élaborer des stratégies plus complexes qui améliorent les utilités à l'équilibre. Le meilleur compromis entre la qualité de l'observation des joueurs et optimalité de l'équilibre n'est pas caractérisé.

Le chapitre 4 est consacré à la reconstruction d'une structure d'observation. Lorsque les joueurs observent les actions passées à travers un canal d'observation arbitraire, l'ensemble des utilités d'équilibre n'est pas caractérisé. La théorie ne nous permet pas de décider si telle ou telle utilité peut être atteinte par une stratégie d'équilibre. Pour remédier à ce problème, nous introduisons un encodeur qui est chargé d'envoyer un signal supplémentaire aux joueurs. Nous caractérisons le signal supplémentaire de cardinalité minimale que l'encodeur doit envoyer aux joueurs afin qu'ils observent parfaitement ou presque parfaitement les actions jouées à l'étape précédente. Ce problème est étudié pour une reconstruction immédiate des actions jouées ainsi que pour une reconstruction asymptotique des suites d'actions jouées. L'approche asymptotique et l'approche en un coup nous permettent d'obtenir des bornes inférieures et supérieures sur les débits des signaux supplémentaires que l'encodeur doit envoyer aux joueurs. La longueur optimale des suites d'actions reconstruites reste à caractériser.

La chapitre 5 analyse les relations étroites qui existent entre les théorèmes de codage de la théorie de Shannon et la caractérisation des utilités d'équilibre pour un jeu répété avec observation imparfaite. Nous fournissons une région des débits atteignables à travers le canal de diffusion sur écoute avec des états asymétriques. La région que nous proposons généralise les travaux antérieurs concernant le canal sur écoute avec état, en considérant deux récepteurs. L'étude du modèle gaussien nous permet de développer certaines intuitions à propos des paramètres du canal. Nous constatons que la région des débits atteignables s'étend lorsque la variance ou la corrélation des états du canal augmente. Cette région se combine avec le théorème de codage de source de Shannon pour fournir un ensemble de sources d'information corrélées qui peuvent être transmises à travers le canal étudié sans qu'un espion ne puisse deviner les informations générées par les sources. Un groupe de joueurs peut utiliser ces possibilités de communication afin de coordonner les suites d'actions futures sans qu'un autre joueur ne puisse inférer ces suites d'actions. Le résultat de codage source canal conjoint, étudié dans le chapitre 5, nous permet de donner une borne supérieure sur les niveaux min-max qu'un groupe de joueurs peut imposer à un autre joueur dans un jeu répété avec observation imparfaite. La caractérisation des niveaux min-max est un premier pas vers la caractérisation des utilités d'équilibre.

La théorie de l'information apporte des solutions pertinentes pour résoudre le problème des niveaux min-max dans les jeux répétés avec observation imparfaite ainsi que le problème de la reconstruction des structures d'observation. Les résultats que nous exposons, nous permettent d'appréhender l'étude des jeux répétés avec observation imparfaite sous un nouvel angle : celui de la théorie de l'information. En conséquence, de

nouveaux modèles de contrôle de puissance, d’allocations de ressources ou de protocoles de réseaux peuvent être étudiés grâce aux outils développés dans cette thèse. Les résultats présentés dans ces quatre chapitres nous permettent d’envisager des solutions d’équilibre qui sont réalistes, quant à l’information dont disposent les joueurs, et qui sont optimales, en terme d’utilité générale du système.

6.2 Perspectives

Nous proposons trois grandes perspectives de travail qui sont mutuellement dépendantes. La première est un prolongement du chapitre 5, la seconde est un prolongement du chapitre 4 et la troisième prolonge le chapitre 3.

- La théorie de Shannon est nécessaire pour caractériser les niveaux de punitions d’un jeu répété avec observation imparfaite. Un groupe de joueurs coordonne ses actions à travers un canal d’observation, dans le but de punir un autre joueur ou un autre groupe de joueurs. Le canal correspondant à cette situation à K joueurs est un canal sur écoute avec $K - 1$ voies et des variations arbitraires contrôlées par le joueur qui est puni. En effet, ce dernier peut altérer la communication des autres joueurs en utilisant deux techniques différentes. La première consiste à essayer de décoder les messages envoyés par l’encodeur. La seconde consiste à choisir une suite d’états du canal de manière à brouiller la communication entre les autres joueurs. La région de capacité d’un tel canal est un problème ouvert qui nous empêche de caractériser les niveaux min-max et donc l’ensemble des utilités d’équilibre. Concernant les $K - 1$ joueurs qui se coordonnent, les distributions corrélées atteignables à travers un tel canal seraient bien plus nombreuses si les décodeurs retrouvaient des suites d’actions mixtes au lieu des suites d’actions pures. Il reste encore à étendre nos résultats pour les suites d’actions mixtes.
- Le problème de la transformation d’une structure d’observation en une autre structure plus précise n’est pas résolu. Pour qu’une telle transformation soit réalisée, il faut s’assurer qu’un joueur ne possède pas plus d’informations que prévu. Pour ce faire, il faudrait étendre nos résultats de reconstruction en considérant le codage de source et de canal sur écoute. De même, le compromis optimal entre l’information à ajouter dans le système pour obtenir une condition d’équilibre et l’optimalité d’une utilité d’équilibre dépend de la caractérisation de l’ensemble des utilités d’équilibre. En théorie, nous pourrions trouver le meilleur compromis entre la quantité de signaux supplémentaires et l’optimalité des utilités à l’équilibre. Ce problème nous permettrait de faire correspondre précisément les niveaux d’information stratégiques aux niveaux d’optimalité.
- Les extensions énoncées ci-dessus nous permettraient d’approfondir l’étude des

systèmes communicants décentralisés et de proposer des solutions techniques proches de l'optimalité. Les résultats d'équilibre sont connus pour poser deux problèmes : soit ils sont sous-optimaux, c'est-à-dire que les utilités correspondantes sont faibles pour tous les joueurs, soit les hypothèses sur l'information dont disposent les joueurs sont irréalistes. Le compromis optimal entre la quantité d'informations disponibles pour les joueurs et l'optimalité d'une solution d'équilibre est une réponse pertinente au problème des communications décentralisées. En combinant une structure d'observation supplémentaire et des stratégies d'équilibre qui font circuler l'information, les joueurs peuvent mettre en œuvre des stratégies décentralisées qui fournissent une solution stable et optimale.

Je tiens à remercier les lecteurs pour s'être intéressés à ce travail et j'espère que les perspectives de recherche, sur lesquelles j'aimerais avoir la possibilité de continuer à travailler, seront fructueuses.

Annexe A

Théorie de Shannon

A.1 Entropie et information mutuelle

Les objets définis dans cette section servent à caractériser les débits asymptotiques d'une source d'information ou d'un canal d'information. Soit $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$ une distribution de probabilités sur l'ensemble discret $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ et $\mathbb{E}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}}$ l'espérance définie par rapport à \mathcal{Q} . Notons $\mathbb{E}_{\mathcal{X}}$ et $\mathbb{E}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ les espérances définies par rapport aux distributions de probabilités marginales, induites par \mathcal{Q} sur \mathcal{X} et $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Notons \mathbf{x} une variable aléatoire et $x \in \mathcal{X}$ une réalisation dans l'ensemble \mathcal{X} . Les résultats suivants sont démontrés dans [65, 18, 20].

Définition A.1 (L'entropie) Définissons l'entropie $H(\mathbf{x})$ d'une variable aléatoire \mathbf{x} et l'entropie conditionnelle $H(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ d'un couple (\mathbf{x}, \mathbf{y}) de variables aléatoires.

$$H(\mathbf{x}) = \mathbb{E}_{\mathcal{X}} \log_2 \frac{1}{\mathcal{Q}(\mathbf{x})} = \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{Q}(x) \log_2 \frac{1}{\mathcal{Q}(x)}, \quad (\text{A.1})$$

$$H(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathbb{E}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \log_2 \frac{1}{\mathcal{Q}(\mathbf{y}|\mathbf{x})} = \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{Q}(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{Q}(y|x) \log_2 \frac{1}{\mathcal{Q}(y|x)}. \quad (\text{A.2})$$

L'entropie peut être interprétée comme une mesure de l'incertitude d'une variable aléatoire. Lorsque la variable aléatoire \mathbf{x} est constante, l'entropie $H(\mathbf{x})$ est nulle. La valeur maximale de $H(\mathbf{x})$ vaut $\log_2 |\mathcal{X}|$ et est atteinte par la distribution de probabilités uniforme.

Proposition A.2 (Entropie)

$$0 \leq H(\mathbf{x}) \leq \log_2 |\mathcal{X}|. \quad (\text{A.3})$$

Proposition A.3 (Règle de chaîne pour l'entropie)

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H(\mathbf{x}) + H(\mathbf{y}|\mathbf{x}). \quad (\text{A.4})$$

Définition A.4 (L'information mutuelle) L'information mutuelle $I(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ d'un couple de variables aléatoires (\mathbf{x}, \mathbf{y}) et l'information mutuelle conditionnelle $I(\mathbf{x}; \mathbf{z}|\mathbf{y})$ d'un triplet $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ de variables aléatoires sont définies comme suit :

$$I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \mathbb{E}_{XY} \log_2 \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{Q}(\mathbf{x})\mathcal{Q}(\mathbf{y})} = \sum_{\substack{x \in \mathcal{X}, \\ y \in \mathcal{Y}}} \mathcal{Q}(x, y) \log_2 \frac{\mathcal{Q}(x, y)}{\mathcal{Q}(x)\mathcal{Q}(y)}, \quad (\text{A.5})$$

$$I(\mathbf{x}; \mathbf{z}|\mathbf{y}) = \mathbb{E}_{XYZ} \log_2 \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\mathbf{y})}{\mathcal{Q}(\mathbf{x}|\mathbf{y})\mathcal{Q}(\mathbf{z}|\mathbf{y})} = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{Q}(y) \sum_{\substack{x \in \mathcal{X}, \\ z \in \mathcal{Z}}} \mathcal{Q}(x, z|y) \log_2 \frac{\mathcal{Q}(x, z|y)}{\mathcal{Q}(x|y)\mathcal{Q}(z|y)}. \quad (\text{A.6})$$

L'information mutuelle mesure la corrélation moyenne entre deux variables aléatoires régies par une distribution de probabilités conjointe.

Proposition A.5 (Information mutuelle)

$$I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \quad (\text{A.7})$$

$$= H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (\text{A.8})$$

$$= H(\mathbf{x}) + H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (\text{A.9})$$

Proposition A.6 (Règle de chaîne pour l'information mutuelle)

$$I(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \mathbf{z}) = I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + I(\mathbf{x}; \mathbf{y}|\mathbf{z}). \quad (\text{A.10})$$

La proposition suivante découle de l'inégalité de Jensen appliquée au logarithme.

Proposition A.7 (Inégalité entropique de Jensen)

$$H(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \leq H(\mathbf{x}) \iff 0 \leq I(\mathbf{x}; \mathbf{y}). \quad (\text{A.11})$$

Définition A.8 (Chaîne de Markov) La distribution de probabilités $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$ satisfait la propriété de chaîne de Markov notée $\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}$ si :

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = \mathcal{Q}(x)\mathcal{Q}(y|x)\mathcal{Q}(z|y) \quad (\text{A.12})$$

$$= \mathcal{Q}(z)\mathcal{Q}(y|z)\mathcal{Q}(x|y), \quad \forall (x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}. \quad (\text{A.13})$$

Proposition A.9 (Inégalité du traitement de données) Si la distribution de probabilités \mathcal{Q} satisfait la propriété de Markov $\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}$, alors :

$$I(\mathbf{x}; \mathbf{z}) \leq I(\mathbf{x}; \mathbf{y}). \quad (\text{A.14})$$

A.2 Suites typiques

Les théorèmes de codage présentés dans les sections suivantes sont composés d'un résultat d'atteignabilité et d'un résultat réciproque. Les suites typiques sont les objets mathématiques qui nous permettent de démontrer les résultats d'atteignabilité. En effet, grâce à la loi des grands nombres, les symboles de source, les suites d'entrées, de sorties et les symboles reconstruits sont typiques avec une grande probabilité lorsque la longueur $n \in \mathbb{N}$ des suites tend vers l'infini.

Définition A.10 (Suites typiques [20]) Soit $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{X})$ une distribution de probabilités sur l'ensemble \mathcal{X} , $x^n \in \mathcal{X}^n$ une suite de longueur n et $N(x|x^n)$ le nombre de symboles $x \in \mathcal{X}$ dans la suite $x^n \in \mathcal{X}^n$. Définissons l'ensemble des suites typiques :

$$A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X}) = \left\{ x^n \in \mathcal{X}^n; \sum_{x \in \mathcal{X}} \left| \frac{N(x|x^n)}{n} - \mathcal{Q}(x) \right| \leq \varepsilon, \forall x \in \mathcal{X}, \mathcal{Q}(x) = 0 \implies N(x|x^n) = 0 \right\}. \quad (\text{A.15})$$

Définition A.11 (Suites typiques conditionnelles [20]) Soit $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ une distribution de probabilités sur l'ensemble $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ et $y^n \in A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{Y})$ une suite typique. Définissons l'ensemble des suites typiques $x^n \in \mathcal{X}^n$ avec la suite $y^n \in A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{Y})$,

$$A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X}|y^n) = \left\{ x^n \in \mathcal{X}^n; \sum_{y \in \mathcal{Y}} \left| \frac{N(x,y|x^n,y^n)}{n} - \mathcal{Q}(x,y) \right| \leq \varepsilon, \forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{Q}(x,y) = 0 \implies N(x,y|x^n,y^n) = 0 \right\}. \quad (\text{A.16})$$

Lemme A.12 (Suites typiques [20]) Soit $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{X})$ une distribution de probabilités et $\mathcal{Q}^{\otimes n}$ la distribution de probabilités produit. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$1 = \mathcal{Q}^{\otimes n}(\mathbf{x}^n \in A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X})), \quad (\text{A.17})$$

$$2^{n(H(\mathbf{x}) - c\varepsilon)} \leq |A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X})| \leq 2^{n(H(\mathbf{x}) + c\varepsilon)}. \quad (\text{A.18})$$

où $c = \log \left(\max_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{\mathcal{Q}(x)} \right)$ et une constante.

Le premier résultat du lemme A.12 affirme qu'une suite tirée de manière indépendante et identiquement distribuée $\mathcal{Q}^{\otimes n}$ est typique par rapport à la distribution de probabilités \mathcal{Q} et ceci avec une probabilité égale à 1. Le second résultat affirme que la taille de l'ensemble des suites typiques est de l'ordre de $2^{nH(\mathbf{x})}$. Ces résultats sont utilisés pour le codage de source présenté à la section A.3. Les suites d'information $x^n \in \mathcal{X}^n$ peuvent être

représentées par les suites typiques. Le débit d'une source est donc évalué par rapport à la taille de l'ensemble typique, c'est-à-dire $H(\mathbf{x})$ et la probabilité d'erreur est égale à la probabilité qu'une suite ne soit pas typique et donc est arbitrairement faible.

Lemme A.13 (Suites typiques conditionnelles [20]) Soit la probabilité conjointe $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, $\mathcal{Q}^{\otimes n}$ la distribution de probabilités produit et une suite $y^n \in A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{Y})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$1 = \mathcal{Q}^{\otimes n} \left(\mathbf{x}^n \in A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X} | y^n) \middle| y^n \right), \quad (\text{A.19})$$

$$2^{n(H(\mathbf{x}|\mathbf{y}) - c\varepsilon)} \leq |A_\varepsilon^{n*}(\mathcal{X} | y^n)| \leq 2^{n(H(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + c\varepsilon)}. \quad (\text{A.20})$$

où $c = \log \left(\max_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{\mathcal{Q}(x)} \right)$ et une constante.

Lemme A.14 (Recouvrement mutuel [25]) Soient $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$ une distribution, \mathcal{Q}_U (resp. \mathcal{Q}_V et \mathcal{Q}_W) la distribution de probabilités marginale induite par \mathcal{Q} sur \mathcal{U} (resp. \mathcal{V} et \mathcal{W}) et $\mathcal{Q}_U^{\otimes n}$, $\mathcal{Q}_V^{\otimes n}$ et $\mathcal{Q}_W^{\otimes n}$ les distributions de probabilités marginales n -fois produit. Soient R_I , R_J et R_L des réels,

$(u_i^n)_{i \in \{1, \dots, 2^{nR_I}\}} \in \mathcal{U}^n$ une famille de suites tirées suivant la distribution marginale $\mathcal{Q}_U^{\otimes n}$,
 $(v_j^n)_{j \in \{1, \dots, 2^{nR_J}\}} \in \mathcal{V}^n$ une famille de suites tirées suivant la distribution marginale $\mathcal{Q}_V^{\otimes n}$,
 $(w_l^n)_{l \in \{1, \dots, 2^{nR_L}\}} \in \mathcal{W}^n$ une famille de suites tirées suivant la distribution marginale $\mathcal{Q}_W^{\otimes n}$.

- Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} R_I + R_J &< I(\mathbf{u}; \mathbf{v}), \\ R_I + R_L &< I(\mathbf{u}; \mathbf{w}), \\ R_J + R_L &< I(\mathbf{v}; \mathbf{w}), \\ R_I + R_J + R_L &< I(\mathbf{u}; \mathbf{v}) + I(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \mathbf{w}), \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\bar{n} \geq 0$ tel que pour tout $n \geq \bar{n}$,

$$\mathcal{P} \left(\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I}, \\ j \in \mathcal{J}, l \in \mathcal{L}}} \left\{ (u_i^n, v_j^n, w_l^n) \in A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}) \right\} \right) \leq \varepsilon. \quad (\text{A.22})$$

- Si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} R_I + R_J &> I(\mathbf{u}; \mathbf{v}), \\ R_I + R_L &> I(\mathbf{u}; \mathbf{w}), \\ R_J + R_L &> I(\mathbf{v}; \mathbf{w}), \\ R_I + R_J + R_L &> I(\mathbf{u}; \mathbf{v}) + I(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \mathbf{w}), \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\bar{n} \geq 0$ tel que pour tout $n \geq \bar{n}$,

$$\mathcal{P} \left(\bigcap_{\substack{i \in \mathcal{I}, \\ j \in \mathcal{J}, l \in \mathcal{L}}} \left\{ (u_i^n, v_j^n, w_l^n) \notin A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}) \right\} \right) \leq \varepsilon. \quad (\text{A.24})$$

Les informations mutuelles $I(\cdot; \cdot)$ et l'ensemble des suites typiques $A_\varepsilon^{*n}(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$ sont définis par rapport à la distribution de probabilités $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$.

La portée de ce lemme est fondamentale pour les démonstrations d'atteignabilité des théorèmes de codage présentés aux sections [A.3-A.10](#). Considérons les familles $(u_i^n)_i$, $(v_j^n)_j$ et $(w_l^n)_l$ de suites de symboles aléatoires indépendamment et identiquement distribués d'étape en étape avec les distributions marginales \mathcal{Q}_U , \mathcal{Q}_V et \mathcal{Q}_W . Aucun triplet (i, j, l) de suites (u_i^n, v_j^n, w_l^n) n'est conjointement typique pour une distribution de probabilités corrélée $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$ si les vitesses d'accroissement des familles R_U , R_V et R_W ne satisfont pas les conditions [\(A.21\)](#). À l'inverse, il existe un triplet (i, j, l) de suites (u_i^n, v_j^n, w_l^n) conjointement typiques pour une distribution de probabilités corrélée $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$ si les vitesses d'accroissement des familles R_U , R_V et R_W satisfont les conditions [\(A.23\)](#).

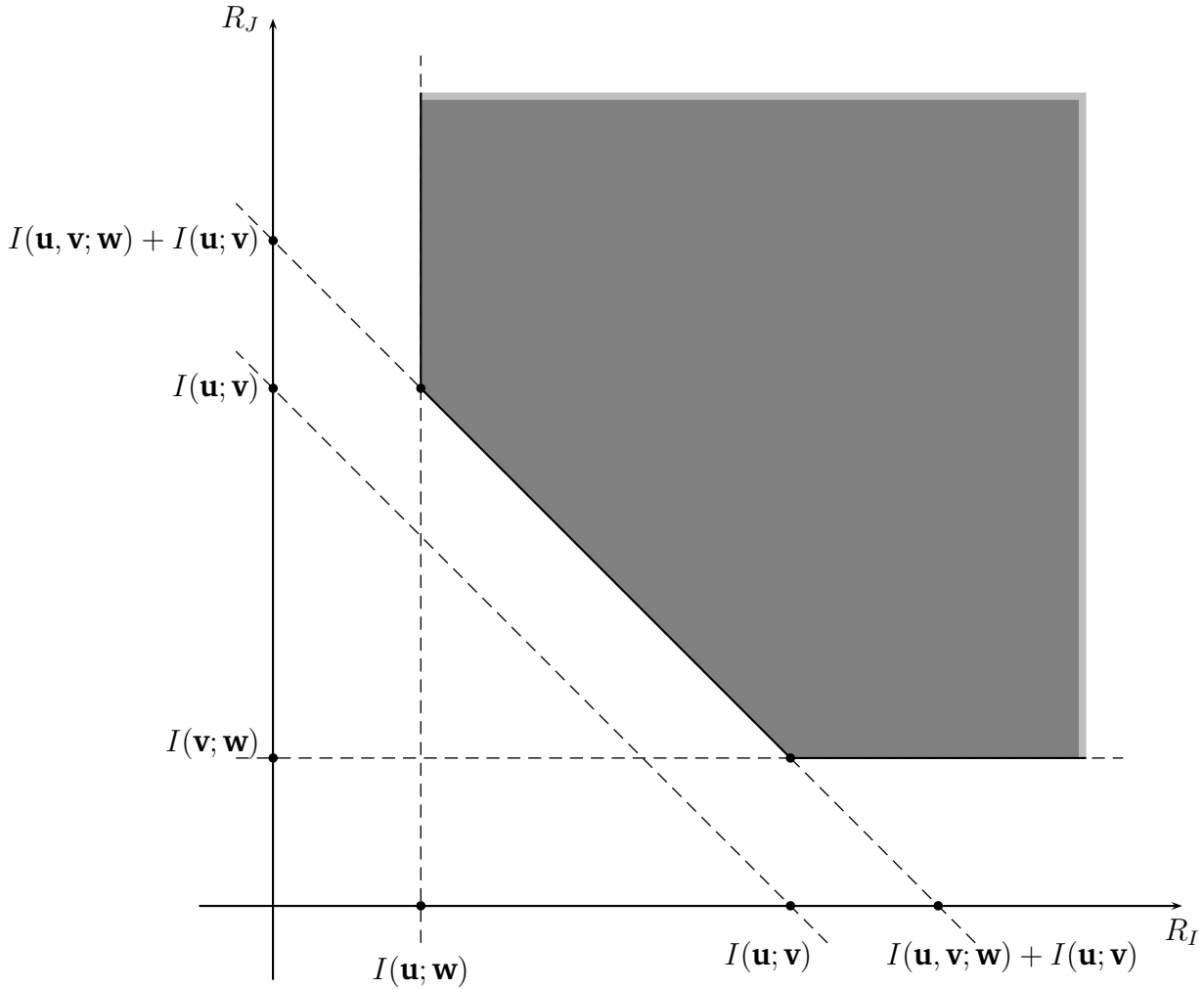


FIGURE A.1 – Lemme du recouvrement mutuel avec 3 variables et $R_L = 0$.

- Remarque A.15** • Supposons que $R_L = 0$, la figure A.1 représente les couples (R_I, R_J) et les conditions A.21 et A.23. Si les vitesses d'accroissement des familles de suites R_I et R_J appartiennent à la région grisée décrite par la figure A.1, alors pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, il existe, avec probabilité $1 - \varepsilon$, un triplet de suites (u_i^n, v_j^n, w_l^n) conjointement typiques pour la distribution $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$. De même, si les vitesses d'accroissement des familles de suites R_I et R_J n'appartiennent pas à la région grisée décrite par la figure A.1, alors pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, il n'existe, avec probabilité $1 - \varepsilon$, aucun triplet de suites (u_i^n, v_j^n, w_l^n) conjointement typique pour la distribution $\mathcal{Q} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$.
- Si $R_L = 0$ et les variables aléatoires \mathbf{w} et (\mathbf{u}, \mathbf{v}) sont indépendantes (i.e. $\mathcal{Q}(u, v, w) = \mathcal{Q}(w)\mathcal{Q}(u, v)$), alors les conditions A.21 et A.23 deviennent celles du lemme du recouvrement mutuel pour deux variables aléatoires.

Lemme A.16 (Inégalité de Fano [18]) Soient \mathbf{x}, \mathbf{y} et $\hat{\mathbf{x}}$ trois variables aléatoires qui vérifient la propriété de Markov $\mathbf{x} - \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}$ et $\mathcal{P}_e = \mathbb{P}\{\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}\}$ la probabilité d'erreur, alors :

$$H(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \leq H(\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}) \leq H_b(\mathcal{P}_e) + \mathcal{P}_e \log(|\mathcal{X}| - 1). \quad (\text{A.25})$$

où $H_b(\mathbf{z})$ est l'entropie d'une variable aléatoire \mathbf{z} binaire.

A.3 Codage de source

Une source d'information est modélisée par un processus stochastique indépendant et identiquement distribué d'étape en étape suivant la loi $\mathcal{P}_u \in \Delta(\mathcal{U})$. Cette loi est connue par l'encodeur \mathcal{C}_s et par le décodeur \mathcal{D}_s . L'encodeur \mathcal{C}_s observe les suites de réalisations des symboles de la source $u^n \in \mathcal{U}^n$ et l'envoie au décodeur en utilisant un ensemble de messages $m \in \mathcal{M}$. Le décodeur reconstruit une suite de symboles $\hat{u}^n \in \mathcal{U}^n$ à partir du message $m \in \mathcal{M}$ reçu. Le débit d'information moyenné qu'un code permet de transmettre se mesure avec $R = \frac{\log_2 M}{n}$ où M est la cardinalité de l'ensemble \mathcal{M} . L'objectif du codage de source est de minimiser le débit R d'un code sous contrainte que la probabilité d'erreur $\hat{u}^n \neq u^n$ soit arbitrairement faible. Notons \mathbf{u}^n , \mathbf{m} et $\hat{\mathbf{u}}^n$ les variables aléatoires de la suite de symboles de source, du message envoyé au décodeur et de la suite de symboles reconstruite par le décodeur.

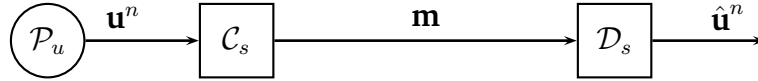


FIGURE A.2 – Une source d'information de loi \mathcal{P}_u génère des suites aléatoires de symboles \mathbf{u}^n . L'encodeur \mathcal{C}_s représente la suite de symboles par un message \mathbf{m} auquel le décodeur \mathcal{D}_s associe une suite de symboles reconstruits $\hat{\mathbf{u}}^n$.

Définition A.17 Définissons un (n, M) -code comme un couple de fonctions :

$$f_s : \mathcal{U}^n \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (\text{A.26})$$

$$g_s : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{U}^n. \quad (\text{A.27})$$

La probabilité d'erreur associée au (n, M) -code est définie comme suit :

$$\mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}(\mathbf{u}^n \neq \hat{\mathbf{u}}^n). \quad (\text{A.28})$$

Définition A.18 Un débit de source R_s est atteignable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un (n, M) -code tel que :

$$\frac{\log_2 M}{n} \leq R_s + \varepsilon, \quad \mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon. \quad (\text{A.29})$$

Notons \mathcal{R}_s^* le minimum des débits atteignables pour la source.

Théorème A.19 ([65]) *Considérons une source d'information indépendante et identiquement distribuée. Le minimum des débits de source est égal à l'entropie de la source.*

$$\mathcal{R}_s^* = H(\mathbf{u}). \quad (\text{A.30})$$

Ce résultat a été démontré par Shannon dans [65].

A.4 Codage de canal

Un canal est constitué d'un ensemble d'entrées \mathcal{X} , d'un ensemble de sorties \mathcal{Y} et d'une probabilité de transition $\mathsf{T} : \mathcal{X} \rightarrow \Delta(\mathcal{Y})$. La transition T est connue par l'encodeur \mathcal{C}_c et par le décodeur \mathcal{D}_c . L'encodeur \mathcal{C}_c utilise les suites de symboles d'entrées $x^n \in \mathcal{X}^n$ afin de transmettre au décodeur \mathcal{D}_c un ensemble de messages $m \in \mathcal{M}$. Ce dernier observe la suite de sorties $y^n \in \mathcal{Y}^n$ générées de manière indépendante et identiquement distribuée d'étape en étape, à travers T . \mathcal{D}_c reconstruit le message $\hat{m} \in \mathcal{M}$. Le débit d'information moyenné qu'un code permet de transmettre se mesure avec $R = \frac{\log_2 M}{n}$ où M est la cardinalité de l'ensemble \mathcal{M} . L'objectif du codage de canal est de maximiser le débit R d'un code sous contrainte que la probabilité d'erreur $\hat{m} \neq m$ soit arbitrairement faible. Notons \mathbf{m} , \mathbf{x}^n , \mathbf{y}^n , et $\hat{\mathbf{m}}$ les variables aléatoires du message, de la suite d'entrées du canal, de la suite de sorties du canal et du message reconstruit par le décodeur. M désigne la cardinalité de l'ensemble \mathcal{M} .

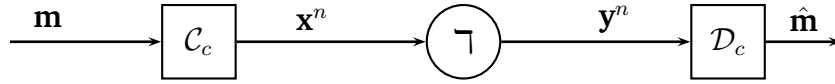


FIGURE A.3 – Un canal T prend un symbole d'entrée \mathbf{x} et génère une distribution de probabilités sur les sorties \mathbf{y} . L'encodeur \mathcal{C}_c représente le message \mathbf{m} par une suite d'entrées \mathbf{x}^n . Le décodeur \mathcal{D}_c observe une suite de sorties \mathbf{y}^n et reconstruit le message $\hat{\mathbf{m}}$.

Définition A.20 Définissons un (n, M) -code comme un couple de fonctions :

$$f_c : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}^n, \quad g_c : \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{M}. \quad (\text{A.31})$$

La probabilité d'erreur associée au (n, M) -code est définie comme suit :

$$\mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}(\mathbf{m} \neq \hat{\mathbf{m}}). \quad (\text{A.32})$$

Définition A.21 Un débit de canal R_c est atteignable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un (n, M) -code tel que :

$$\frac{\log_2 M}{n} \geq R_c - \varepsilon, \quad \mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon. \quad (\text{A.33})$$

La capacité C du canal T est le maximum des débits atteignables pour le canal.

Théorème A.22 ([65]) Considérons un canal d'information T indépendant et identiquement distribué d'étape en étape. Le maximum des débits du canal est égal à l'information mutuelle maximale entre l'entrée et la sortie du canal.

$$C = \max_{\mathcal{P}_x \in \Delta(\mathcal{X})} I(\mathbf{x}; \mathbf{y}). \quad (\text{A.34})$$

Ce résultat a été démontré par Shannon dans [65].

A.5 Codage de source-canal conjoint

Le problème est de déterminer si la source d'information \mathbf{u} peut être transmise à travers le canal \mathcal{T} . Notons \mathbf{u}^n , \mathbf{x}^n , \mathbf{y}^n , et $\hat{\mathbf{u}}^n$ les variables aléatoires de la suite de symboles de source, de la suite d'entrées du canal, de la suite de sorties du canal et de la suite de symboles reconstruite par le décodeur.

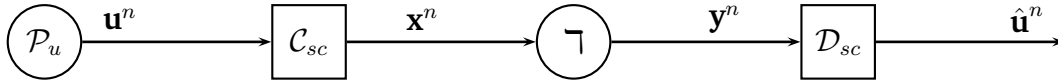


FIGURE A.4 – L'encodeur \mathcal{C}_{sc} observe une suite de symboles de source \mathbf{u}^n de loi \mathcal{P}_u et associe une suite de symboles d'entrée \mathbf{x}^n du canal \mathcal{T} . Le décodeur \mathcal{D}_{sc} reçoit une suite de symboles \mathbf{y}^n de sortie du canal et reconstruit une suite de symboles $\hat{\mathbf{u}}^n$.

Définition A.23 Définissons un n -code comme un couple de fonctions :

$$f_{sc} : \mathcal{U}^n \longrightarrow \mathcal{X}^n, \quad (\text{A.35})$$

$$g_{sc} : \mathcal{Y}^n \longrightarrow \hat{\mathcal{U}}^n. \quad (\text{A.36})$$

La probabilité d'erreur associée au n -code est définie comme suit :

$$\mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}(\mathbf{u}^n \neq \hat{\mathbf{u}}^n). \quad (\text{A.37})$$

Définition A.24 La source d'information \mathbf{u} peut être transmise à travers le canal \mathcal{T} si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un n -code tel que $\mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon$.

Théorème A.25 (Séparation [65]) La source d'information \mathbf{u} peut être transmise à travers le canal \mathcal{T} si et seulement si :

$$H(\mathbf{u}) \leq \max_{\mathcal{P}_x \in \Delta(\mathcal{X})} I(\mathbf{x}; \mathbf{y}). \quad (\text{A.38})$$

Ce résultat a été démontré par Shannon dans [65]. En conséquence, la concaténation (voir figure A.5) du codage de source de la section A.3 et du codage canal de la section A.4 est optimale pour le problème du codage conjoint. Le concept de débit, pour une source \mathbf{u} et pour un canal \mathcal{T} , est adéquat pour mesurer une quantité d'information.

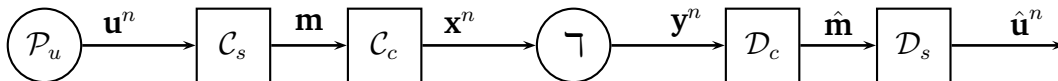


FIGURE A.5 – Schéma du codage source-canal conjoint séparé.

A.6 Source avec information adjacente au décodeur

Une source d'information \mathbf{u} avec information adjacente \mathbf{v} au décodeur est modélisée par un processus stochastique indépendant et identiquement distribué d'étape en étape sur suivant la loi $\mathcal{P}_{uv} \in \Delta(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$. Cette loi est connue par l'encodeur \mathcal{C}_{sa} et par le décodeur \mathcal{D}_{sa} . L'encodeur \mathcal{C}_{sa} observe les suites de réalisations des symboles $u^n \in \mathcal{U}^n$ et l'envoi au décodeur \mathcal{D}_{sa} en utilisant un ensemble de messages $m \in \mathcal{M}$. L'objectif du codage de source est de minimiser le débit $R = \frac{\log_2 M}{n}$ d'un code sous contrainte que la probabilité d'erreur ($\hat{u}^n \neq u^n$) soit arbitrairement faible. Le décodeur observe les suites de réalisations des symboles $v^n \in \mathcal{V}^n$, le message $m \in \mathcal{M}$ et reconstruit une suite de symboles $\hat{u}^n \in \mathcal{U}^n$ telle que la probabilité d'erreur $\hat{u}^n \neq u^n$ soit minimale. Notons \mathbf{u}^n , \mathbf{v}^n , \mathbf{m} et $\hat{\mathbf{u}}^n$ les variables aléatoires des suites de symboles de source, du message envoyé au décodeur et de la suite de symboles reconstruite par le décodeur.

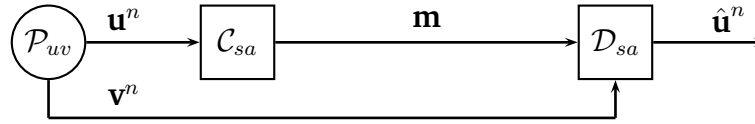


FIGURE A.6 – Source d'information \mathbf{u} avec information adjacente \mathbf{v} au décodeur.

Définition A.26 Définissons un (n, M) -code comme un couple de fonctions :

$$f_{sa} : \mathcal{U}^n \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (\text{A.39})$$

$$g_{sa} : \mathcal{M} \times \mathcal{V}^n \longrightarrow \mathcal{U}^n. \quad (\text{A.40})$$

La probabilité d'erreur associée au (n, M) -code est définie comme suit :

$$\mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}(\mathbf{u}^n \neq \hat{\mathbf{u}}^n). \quad (\text{A.41})$$

Un débit R_{sa} est atteignable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un (n, M) -code tel que :

$$\frac{\log_2 M}{n} \leq R_{sa} + \varepsilon, \quad (\text{A.42})$$

$$\mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon. \quad (\text{A.43})$$

Notons \mathcal{R}_{sa}^* le minimum des débits de source atteignables.

Théorème A.27 ([69]) *Le minimum des débits de source avec information adjacente au décodeur est donné par :*

$$\mathcal{R}_{sa}^* = H(\mathbf{u}|\mathbf{v}). \quad (\text{A.44})$$

Ce résultat a été démontré par Slepian et Wolf dans [69].

A.7 Canal avec état connu par l'encodeur (non-causal)

Un canal avec état est constitué d'un ensemble d'entrées \mathcal{X} , d'un ensemble de sorties \mathcal{Y} , d'un ensemble d'états \mathcal{S} , d'une distribution de probabilités $\mathcal{P}_s \in \Delta(\mathcal{S})$ sur les états et d'une probabilité de transition $\mathsf{T}_s : \mathcal{X} \times \mathcal{S} \rightarrow \Delta(\mathcal{Y})$. La transition T_s et la loi \mathcal{P}_s sont connues par l'encodeur \mathcal{C}_{ce} et par le décodeur \mathcal{D}_{ce} . Le cas est non-causal car l'encodeur \mathcal{C}_{ce} connaît la suite infinie des réalisations $s^\infty \in \mathcal{S}^\infty$ des états du canal générés de manière i.i.d. par \mathcal{P}_s . Ce dernier utilise les suites de symboles d'entrée $x^n \in \mathcal{X}^n$ afin de transmettre au décodeur \mathcal{D}_{ce} un ensemble de messages $m \in \mathcal{M}$. \mathcal{D}_{ce} observe la suite de sorties $y^n \in \mathcal{Y}^n$ générée de manière i.i.d. à travers T_s et reconstruit le message $\hat{m} \in \mathcal{M}$. L'objectif du codage de canal est de maximiser le débit $R = \frac{\log_2 M}{n}$ d'un code sous contrainte que la probabilité d'erreur $\hat{m} \neq m$ soit arbitrairement faible. Notons \mathbf{m} , \mathbf{s}^n , \mathbf{x}^n , \mathbf{y}^n , et $\hat{\mathbf{m}}$ les variables aléatoires du message, de la suite d'états, de la suite d'entrées, de la suite de sorties du canal et du message reconstruit par le décodeur.

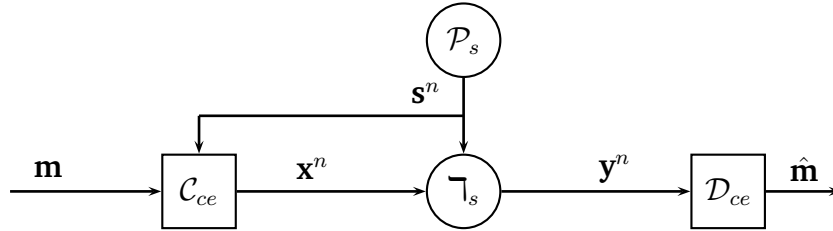


FIGURE A.7 – Canal T_s avec un état \mathbf{s} connu de manière non-causale par l'encodeur \mathcal{C}_{ce} .

Définition A.28 Définissons un (n, M) -code comme un couple de fonctions auquel une probabilité d'erreur \mathcal{P}_e^n est associée.

$$f_{ce} : \mathcal{M} \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{X}^n, \quad g_{ce} : \mathcal{Y}^n \rightarrow \hat{\mathcal{M}}, \quad \mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}(\mathbf{m} \neq \hat{\mathbf{m}}). \quad (\text{A.45})$$

Un débit R_{ce} est atteignable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un (n, M) -code tel que :

$$\frac{\log_2 M}{n} \geq R_{ce} - \varepsilon, \quad \mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon. \quad (\text{A.46})$$

La capacité C_s du canal T_s avec états est le maximum des débits atteignables.

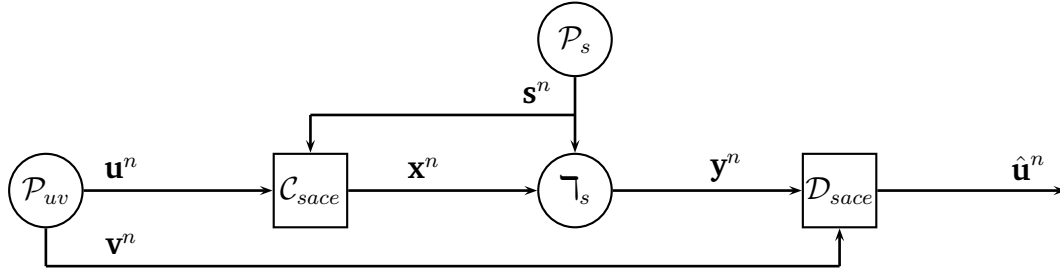
Théorème A.29 ([31]) Soit \mathbf{w} une variable aléatoire auxiliaire définie sur un ensemble \mathcal{W} qui vérifie la chaîne de Markov $\mathbf{w} - (\mathbf{s}, \mathbf{x}) - \mathbf{y}$. La capacité du canal avec états connus par l'encodeur est donnée par :

$$C_s = \max_{\substack{\mathcal{P}_{w|s}: \mathcal{S} \rightarrow \Delta(\mathcal{W}), \\ h: \mathcal{W} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}}} I(\mathbf{w}; \mathbf{y}) - I(\mathbf{w}; \mathbf{s}). \quad (\text{A.47})$$

Ce résultat a été démontré par Gel'fand et Pinsker [31]. La variable auxiliaire \mathbf{w} est générée de manière artificielle afin de corrélérer les suites d'entrées x^n avec les suites d'états s^n du canal.

A.8 Codage conjoint d'une source avec information adjacente et d'un canal avec état

Une source d'information \mathbf{u} avec information adjacente \mathbf{v} au décodeur peut-elle être transmise à travers le canal $\Upsilon_s : \mathcal{X} \times \mathcal{S} \rightarrow \Delta(\mathcal{Y})$ avec état \mathbf{s} connu par l'encodeur ?



Définition A.30 Définissons un n -code comme un couple de fonctions auquel une probabilité d'erreur \mathcal{P}_e^n est associée.

$$f_{sace} : \mathcal{U}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{X}^n, \quad g_{sace} : \mathcal{Y}^n \times \mathcal{V}^n \rightarrow \hat{\mathcal{U}}^n, \quad \mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}(\mathbf{u}^n \neq \hat{\mathbf{u}}^n) \quad (\text{A.48})$$

La source d'information \mathbf{u} peut être transmise à travers le canal Υ_s si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un n -code tel que $\mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon$.

Théorème A.31 (Séparation [50]) Soit \mathbf{w} une variable aléatoire auxiliaire définie sur un ensemble \mathcal{W} qui vérifie la chaîne de Markov $\mathbf{w} - (\mathbf{s}, \mathbf{x}) - \mathbf{y}$. La source d'information \mathbf{u} avec information adjacente \mathbf{v} au décodeur peut être transmise à travers le canal Υ_s avec état \mathbf{s} si et seulement si :

$$H(\mathbf{u}|\mathbf{v}) \leq \max_{\substack{\mathcal{P}_{\mathbf{w}|\mathbf{s}} : \mathcal{S} \rightarrow \Delta(\mathcal{W}), \\ h : \mathcal{W} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}}} I(\mathbf{w}; \mathbf{y}) - I(\mathbf{w}; \mathbf{s}). \quad (\text{A.49})$$

Ce résultat a été démontré par Merhav et Shamai dans [50].

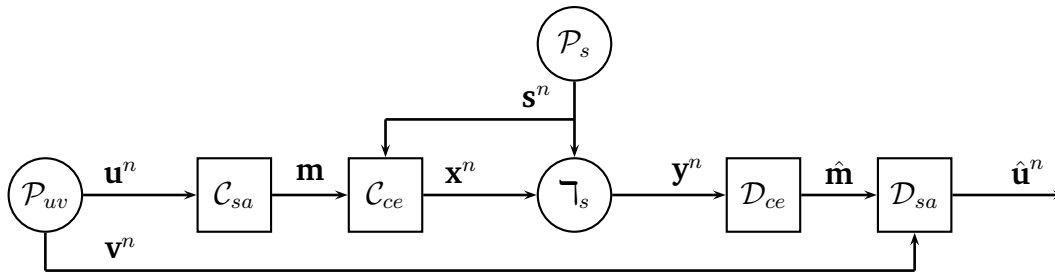


FIGURE A.8 – La concaténation des codages des sections A.6 et A.7 est optimale.

A.9 Canal de diffusion

Un canal de diffusion est constitué d'un ensemble d'entrées \mathcal{X} , de deux ensembles de sorties \mathcal{Y}_1 et \mathcal{Y}_2 et d'une probabilité de transition $\mathsf{T}_d : \mathcal{X} \rightarrow \Delta(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2)$. La transition T_d est connue par l'encodeur \mathcal{C} et par les décodeurs \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . L'encodeur \mathcal{C} utilise les suites de symboles d'entrée $x^n \in \mathcal{X}^n$ afin de transmettre aux décodeurs \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 des ensembles de messages $m_1 \in \mathcal{M}_1$ et $m_2 \in \mathcal{M}_2$. Le décodeur \mathcal{D}_k , avec $k \in \{1, 2\}$ observe la suite de sorties $y_k^n \in \mathcal{Y}_k^n$, générée de manière indépendante et identiquement distribuée à travers T_d et reconstruit le message $\hat{m}_k \in \mathcal{M}_k$. L'objectif du codage de canal est de maximiser les débits (R_1, R_2) d'un code sous contrainte que la probabilité d'erreur $(\hat{m}_1, \hat{m}_2) \neq (m_1, m_2)$ soit arbitrairement faible. Notons $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{x}^n, \mathbf{y}_1^n, \mathbf{y}_2^n, \hat{\mathbf{m}}_1$ et $\hat{\mathbf{m}}_2$ les variables aléatoires des messages destinés aux décodeurs \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , de la suite d'entrées du canal, de la suite de sorties du canal, et des messages reconstruits par les décodeurs.

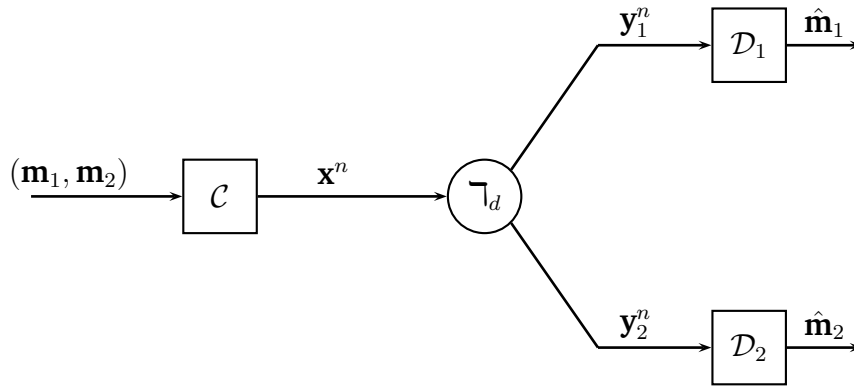


FIGURE A.9 – Le canal T_d de diffusion prend un symbole d'entrée \mathbf{x} et génère une distribution de probabilités sur les couples de sorties $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$. L'encodeur \mathcal{C}_c représente le couple de messages $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$ par une suite d'entrées \mathbf{x}^n . Le décodeur \mathcal{D}_k , avec $k \in \{1, 2\}$ observe une suite de sorties \mathbf{y}_k^n et reconstruit un message $\hat{\mathbf{m}}_k$.

Définition A.32 Définissons un (n, M_1, M_2) -code comme un triplet de fonctions :

$$f : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{X}^n, \quad (\text{A.50})$$

$$g_1 : \mathcal{Y}_1^n \rightarrow \mathcal{M}_1, \quad (\text{A.51})$$

$$g_2 : \mathcal{Y}_2^n \rightarrow \mathcal{M}_2, \quad (\text{A.52})$$

$$(\text{A.53})$$

La probabilité d'erreur associée au (n, M_1, M_2) -code est définie comme suit :

$$\mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}\left((\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) \neq (\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2)\right). \quad (\text{A.54})$$

Définition A.33 Un couple de débits (R_1, R_2) est atteignable pour le canal \mathcal{T}_d si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un (n, M_1, M_2) -code tel que :

$$\frac{\log_2 M_1}{n} \geq R_1 - \varepsilon, \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\log_2 M_2}{n} \geq R_2 - \varepsilon, \quad (\text{A.56})$$

$$\mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon. \quad (\text{A.57})$$

La région de capacité C_d du canal \mathcal{T}_d est l'ensemble des couples de débits atteignables.

Théorème A.34 (Atteignabilité [49]) Soient \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 des variables aléatoires auxiliaires définies sur les ensembles \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 qui satisfont la chaîne de Markov $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - \mathbf{x} - (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$. La région de capacité C_d du canal \mathcal{T}_d contient l'ensemble de débits (R_1, R_2) qui satisfont les équations suivantes :

$$R_1 \leq I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1), \quad (\text{A.58})$$

$$R_2 \leq I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2), \quad (\text{A.59})$$

$$R_1 + R_2 \leq I(\mathbf{u}_1; \mathbf{y}_1) + I(\mathbf{u}_2; \mathbf{y}_2) - I(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2). \quad (\text{A.60})$$

Ce résultat a été démontré par Marton dans [49]. Les variables auxiliaires \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont générées de manière artificielle et servent à corréliser la suite des entrées $x^n \in \mathcal{X}^n$ du canal avec les messages $m_1 \in \mathcal{M}_1$ et $m_2 \in \mathcal{M}_2$ choisis. La région décrite par ces équations est un sous-ensemble de la région de capacité C_d de canal \mathcal{T}_d . La caractérisation des couples de débits réalisables à travers \mathcal{T}_d est un problème ouvert.

A.10 Canal sur écoute

Un canal sur écoute est constitué d'un ensemble d'entrées \mathcal{X} , de deux ensembles de sorties \mathcal{Y} et \mathcal{Z} et d'une probabilité de transition $\mathcal{T}_e : \mathcal{X} \rightarrow \Delta(\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$. Cette transition est connue par l'encodeur \mathcal{C} et par le décodeur \mathcal{D} légitime. Le décodeur légitime \mathcal{D} observe la suite des sorties $y^n \in \mathcal{Y}^n$, pendant qu'un espion \mathbb{E} observe la suite de sorties $z^n \in \mathcal{Z}^n$. Ces suites sont générées de manière indépendante et identiquement distribuée à travers \mathcal{T}_e . L'encodeur \mathcal{C} utilise les suites de symboles d'entrée $x^n \in \mathcal{X}^n$ afin de transmettre au décodeur légitime \mathcal{D} un message parmi l'ensemble $m \in \mathcal{M}$ de cardinalité M sans que

l'espion ne puisse inférer le message envoyé. L'objectif du codage de canal sur écoute est de maximiser le débit R d'un code sous contrainte que la probabilité d'erreur $\hat{m} \neq m$ soit arbitrairement faible et que l'incertitude de l'espion soit maximale. Notons \mathbf{m} , \mathbf{x}^n , \mathbf{y}^n , \mathbf{z}^n et $\hat{\mathbf{m}}$ les variables aléatoires du message destiné au décodeur \mathcal{D} , de la suite d'entrées du canal, des suites de sorties du canal, et du message reconstruit par le décodeur.

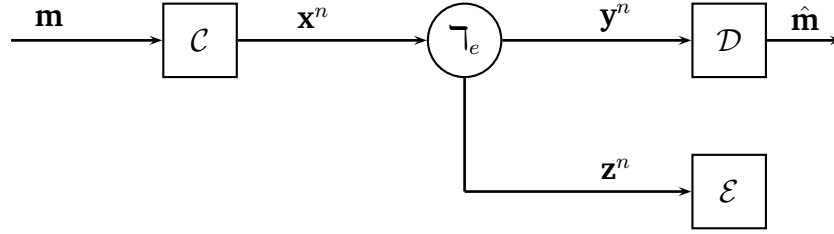


FIGURE A.10 – Le canal \mathcal{T}_e prend un symbole d'entrée \mathbf{x} et génère une distribution de probabilités sur les couples de sorties (\mathbf{y}, \mathbf{z}) . L'encodeur \mathcal{C} représente le message \mathbf{m} par une suite d'entrées \mathbf{x}^n . Le décodeur \mathcal{D} observe une suite de sorties \mathbf{y}^n et reconstruit un message $\hat{\mathbf{m}}$. L'objectif est de maximiser le débit R pour une probabilité d'erreur arbitrairement faible et une incertitude maximale de l'espion, à propos du message envoyé.

Définition A.35 Définissons un (n, M) -code comme un couple de fonctions :

$$f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X}^n, \quad (\text{A.61})$$

$$g : \mathcal{Y}^n \longrightarrow \mathcal{M}. \quad (\text{A.62})$$

La probabilité d'erreur associée au (n, M) -code est définie comme suit :

$$\mathcal{P}_e^n = \mathcal{P}(\mathbf{m} \neq \hat{\mathbf{m}}). \quad (\text{A.63})$$

L'incertitude de l'espion est définie comme suit :

$$\frac{H(\mathbf{m}|\mathbf{z}^n)}{n}. \quad (\text{A.64})$$

Définition A.36 Un débit R est atteignable pour le canal \mathcal{T}_e sur écoute si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un (n, M) -code tel que :

$$\frac{\log_2 M}{n} \geq R - \varepsilon, \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{H(\mathbf{m}|\mathbf{z}^n)}{n} \geq R - \varepsilon, \quad (\text{A.66})$$

$$\mathcal{P}_e^n \leq \varepsilon. \quad (\text{A.67})$$

La capacité sécurisée C_e du canal sur écoute \mathcal{T}_e est le maximum des débits atteignables.

Remarque A.37 La condition A.66 implique la condition A.65 car :

$$H(\mathbf{m}|\mathbf{z}^n) \leq H(\mathbf{m}) \leq \log_2 M. \quad (\text{A.68})$$

Théorème A.38 ([85]) La capacité sécurisée C_e du canal sur écoute \mathcal{T}_e est égale à :

$$C_e = \left[I(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - I(\mathbf{x}; \mathbf{z}) \right]_+. \quad (\text{A.69})$$

Ce résultat a été démontré par Wyner dans [85].

A.11 Bibliographie

- [1] R. Ahlswede. Coloring hypergraphs : A new approach to multi-user source coding, part 1. *Journal of combinatorics, information and system sciences*, 4(1) :76–115, 1979.
- [2] R. Ahlswede. Coloring hypergraphs : A new approach to multi-user source coding, part 2. *Journal of combinatorics, information and system sciences*, 5(3) :220–268, 1980.
- [3] R. J. Aumann. Survey of repeated games. Technical report, Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern, edited by V. Bohm, Bibliographisches Institut, Mannheim.
- [4] R. J. Aumann. The core of a cooperative game without side payments. *Transactions of the American Mathematical Society*, 98(3) :539–552, 1961.
- [5] R. J. Aumann and L. Shapley. Long term competition. In *A Game Theoretic Analysis*, 1976.
- [6] G. Bagherikaram, A.S. Motahari, and A. K. Khandani. Secure broadcasting : The secrecy rate region. In *Proc. 46th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, pages 834–841, Sept. 2008.
- [7] E. V. Belmega and S. Lasaulce. Energy-efficient precoding for multiple-antenna terminals. *IEEE. Trans. on Signal Processing*, 59(1) :329–340, 2011.
- [8] E. V. Belmega, S. Lasaulce, and M. Debbah. Power allocation games for mimo multiple access channels with coordination. *IEEE Trans. on Wireless Communications*, 8(6) :3182–3192, 2009.
- [9] M. Bennis, M. Le Treust, S. Lasaulce, and M. Debbah. Spectrum sharing games in the interference channel. *IEEE Proc. of the 1st International Conference on Game Theory for Network (GAMENETS09)*, Istanbul, Turkey, 2009.
- [10] J.-P. Benoit and V. Krishna. Finitely repeated games. *Econometrica*, 53(4) :905–22, July 1985.
- [11] J.-P. Benoit and V. Krishna. Nash equilibria of finitely repeated games. *Int. J. Game Theory*, 16(3) :197–204, 1987.
- [12] C. Berge. *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris, 1958.
- [13] T. Berger. *Rate Distortion Theory : A Mathematical Basis for Data Compression*. 1971.
- [14] T. Berger. The source coding game. *IEEE Trans. on Information Theory*, IT-17(1) :71–76, Jan. 1971.
- [15] T. Berger, Z. Zhang, and H. Viswanathan. The ceo problem. *IEEE Trans. Information Theory*, 42(3) :887–902, 1996.
- [16] Y. Chen and H. Vinck. Wiretap channel with side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54 :395–402, 2008.

- [17] T. Cover. *Some advances in broadcast channels*, volume 4. 1975.
- [18] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of information theory*. 2nd. Ed., Wiley-Interscience, New York, 2006.
- [19] I. Csiszár and J. Körner. Broadcast channels with confidential messages. *IEEE Transactions on Information Theory*, 24(3) :339 – 348, May 1978.
- [20] I. Csiszár and J. Körner. *Information Theory : Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*. 1981.
- [21] M. Debbah, S. Lasaulce, M. Le Treust, and H. Tembine. Contrôle de puissance dynamique pour les communications sans fils. *Actes de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF10)*, 2010.
- [22] R.L. Dobrušin. Individual methods for transmission of information for discrete channels without memory and messages with independent components. *Sov. Math.*, 4 :253–256, 1963.
- [23] R.L. Dobrušin. Unified methods of optimal quantizing of messages. *Sov. Math.*, 4 :284–292, 1963.
- [24] P. K. Dutta. A folk theorem for stochastic games. *Journal of Economic Theory*, 66(1) :1 – 32, 1995.
- [25] A. A. El Gamal and E. van der Meulen. A proof of Marton’s coding theorem for the discrete memoryless broadcast channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, 27(1) :120–122, Jan. 1981.
- [26] R. Etkin, A. Parekh, and D. Tse. Spectrum sharing for unlicensed bands. *IEEE Journal on Selected Areas on Communications, Special issue on adaptive, Spectrum Agile and Cognitive Wireless Networks*, 25(3) :517–528, 2007.
- [27] H. V. Poor F. Meshkati, M. Chiang and S. C. Schwartz. A game-theoretic approach to energy-efficient power control in multi-carrier cdma systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 24(6) :1115–1129, 2006.
- [28] S. C. Schwartz F. Meshkati, H. V. Poor and N. B. Mandayam. An energy-efficient approach to power control and receiver design in wireless data networks. *IEEE Trans. on Comm.*, 53(11), 2005.
- [29] D. Fudenberg, D. Levine, and E. Maskin. The folk theorem with imperfect public information. *Econometrica*, 62(5) :997–1039, 1994.
- [30] D. Fudenberg and Y. Yamamoto. The folk theorem for irreducible stochastic games with imperfect public monitoring. *Journal of Economic Theory*, 146(4).
- [31] S. I. Gelfand and M. S. Pinsker. Coding for channel with random parameters. *Problems of Control and inform. theory*, 9(1) :19–31, 1980.
- [32] D. J. Goodman and N. Mandayam. Power control for wireless data. *IEEE Personal Communications*, 7(2) :45–54, April 2000.
- [33] D. J. Goodman and N. B. Mandayam. Power control for wireless data. *IEEE Person. Comm.*, 7 :48–54, 2000.

- [34] O. Gossner, R. Laraki, and T. Tomala. Informationally optimal correlation. *Mathematical Programming*, 116(1-2) :147–172, 2009.
- [35] O. Gossner and T. Tomala. Empirical distributions of beliefs under imperfect observation. *Mathematics of Operation Research*, 31(1) :13–30, 2006.
- [36] O. Gossner and T. Tomala. Secret correlation in repeated games with imperfect monitoring. *Mathematics of Operation Research*, 32(2) :413–424, 2007.
- [37] O. Gossner and N. Vieille. How to play with a biased coin? *Games and Economic Behavior*, 41(2) :206–226, 2002.
- [38] T. S. Han. *Information-spectrum methods in information theory*. Springer, 2003.
- [39] G. He, S. Lasaulce, Y. Hayel, and M. Debbah. A multi-level hierarchical game-theoretical approach for cognitive networks.
- [40] J. Hörner and W. Olszewski. The folk theorem for games with private almost-perfect monitoring. *Econometrica*, 74(6) :1499–1544, 2006.
- [41] J. Hörner, T. Sugaya, S. Takahashi, and N. Vieille. Recursive methods in discounted stochastic games : An algorithm for $\delta \rightarrow 0$ and a folk theorem. *Econometrica*, 79(4).
- [42] M. Kandori and H. Matsushima. Private observation, communication and collusion. *Econometrica*, 66(3) :627–652, 1998.
- [43] A. Khisti, A. Tchamkerten, and G.W. Wornell. Secure broadcasting over fading channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54 :2453–2469, 2008.
- [44] H. W. Kuhn. *Extensive games and the problem of information*, volume 28. 1953.
- [45] S. Lasaulce, Y. Hayel, R. El Azouzi, and M. Debbah. Introducing hierarchy in energy games. *IEEE Trans. on Wireless Comm.*, 8(7) :3833–3843, 2009.
- [46] M. Le Treust, H. Tembine, S. Lasaulce, and M. Debbah. Coverage games in small cells networks. *IEEE Proc. of the Future Network and Mobile Summit (FUNEMS10)*, Florence, Italy, 2010.
- [47] E. Lehrer. Nash equilibria of n-player repeated games with semi-standard information. *International Journal of Game Theory*, 19(2) :191–217, 1990.
- [48] L. Lovasz. On the shannon capacity of a graph. *IEEE Transactions on Information Theory*, 25 :1–7, 1979.
- [49] K. Marton. A coding theorem for the discrete memoryless broadcast channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, 25 :306–311, Mar. 1979.
- [50] N. Merhav and S. Shamai. On joint source-channel coding for the wyner-ziv source and the gel’fand-pinsker channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(11) :2844–2855, Nov 2003.
- [51] F. Meriaux, M. Le Treust, S. Lasaulce, and M. Kieffer. Energy-efficient power control strategies for stochastic games. In *IEEE Proc. of the 17th International Conference on Digital Signal Processing (DSP11)*, Corfu (Greece), June 2011.

- [52] F. Meriaux, M. Le Treust, S. Lasaulce, and M. Kieffer. Jeux stochastiques et contrôle de puissance distribué. *Actes de la Conférence du Groupement de Recherche en Traitement du Signal et des Images (GRETSI11)*, Bordeaux, France, 2011.
- [53] J. F. Mertens. A note on the characteristic function of supergames. *International Journal of Game Theory*, 9(4) :189–190, 1980.
- [54] J. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54 :286–295, 1951.
- [55] A. Neyman and D. Okada. Strategic entropy and complexity in repeated games. *Games and Economic Behavior*, 29(1–2) :191–223, 1999.
- [56] A. Neyman and D. Okada. Repeated games with bounded entropy. *Games and Economic Behavior*, 30(2) :228–247, 2000.
- [57] P. Hernandez O. Gossner and A. Neyman. Optimal use of communication resources. *Econometrica*, 74(6) :1603–1636, 2006.
- [58] J. Renault and T. Tomala. Repeated proximity games. *International Journal of Games Theory*, 27 :539–559, 1998.
- [59] J. Renault and T. Tomala. General properties of long-run supergames. *Dynamic Games and Applications*, 1(2) :319–350, 2011.
- [60] V. Rodriguez. An analytical foundation for resource management in wireless communication. *IEEE Proc. of Globecom*, 2003.
- [61] A. Rubinstein. Equilibrium in supergames with the overtaking criterion. *Journal of Economics Theory*, 21(1) :1–9, 1979.
- [62] R. El Azouzi S. Lasaulce, Y. Hayel and M. Debbah. Introducing hierarchy in energy games. *IEEE Trans. on Wireless Comm.*, 8(7) :3833–3843, 2009.
- [63] R. Selten. Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfragetra-
gheit. *Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft*, 1965.
- [64] V. Shah, N. B. Mandayam, and D. J. Goodman. Power control for wireless data based on utility and pricing. *IEEE Proc. of the 9th Intl. Symp. on Indoor and Mobile Radio Commun. (PIMRC)*, 3 :1427–1432, 1998.
- [65] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27 :379–423, Jul. 1948.
- [66] C. E. Shannon. Communication theory of secrecy systems. *Bell System Technical Journal*, 28 :656–715, Oct. 1949.
- [67] C. E. Shannon. The zero error capacity of a noisy channel. *IRE Trans. Inf. Theory*, 2 :8–19, 1956.
- [68] L. Shapley. Stochastic games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 39(10) :1095–1100, 1953.
- [69] D. Slepian and J. K. Wolf. Noiseless coding of correlated information sources. *IEEE Trans. on Information Theory*, IT-19 :471–480, July. 1973.

- [70] S. Sorin. On repeated games with complete information. *Mathematics of Operation Research*, 11(1) :147–160, 1986.
- [71] S. Sorin. *Repeated Games with Complete Information*, in *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, volume 1. Elsevier Science Publishers, 1992.
- [72] Y. Steinberg and S. Shamai. Achievable rates for the broadcast channel with states known at the transmitter. In *Proc. International Symposium on Information Theory ISIT 2005*, pages 2184–2188, 4–9 Sept. 2005.
- [73] T. Tomala. Pure equilibria of repeated games with public observation. *International Journal of Game Theory*, 27(1) :93–109, 1998.
- [74] M. Le Treust, Y. Hayel, S. Lasaulce, and M. Debbah. To sense or not to sense in energy-efficiency power control game. *IEEE Proc. of the 2th International Conference on Game Theory for Network (GAMENETS11)*, Shanghai, China, 2011.
- [75] M. Le Treust and S. Lasaulce. Approche bayésienne pour le contrôle de puissance décentralisé efficace Énergétiquement. *Actes de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF10)*, 2010.
- [76] M. Le Treust and S. Lasaulce. Implicit cooperation in distributed energy-efficient networks. *IEEE Proc. of the 4th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP10)*, Limassol, Cyprus, 2010.
- [77] M. Le Treust and S. Lasaulce. A repeated game formulation of energy-efficient decentralized power control. *IEEE Trans. on Wireless Commun.*, 9(9) :2860 – 2869, Sept. 2010.
- [78] M. Le Treust and S. Lasaulce. Codage de source stratégique avec information adjacente au décodeur. *Actes de la Conférence du Groupement de Recherche en Traitement du Signal et des Images (GRETSI11)*, Bordeaux, France, 2011.
- [79] M. Le Treust and S. Lasaulce. The price of re-establishing almost perfect monitoring in games with arbitrary monitoring structures. *ACM Proc. of the 4th International Workshop on Game Theory in Communication Networks (GAMECOMM11)*, Cachan (Paris), France, 2011.
- [80] M. Le Treust and S. Lasaulce. Resilient source coding. *IEEE Proc. of the international conference on network games, control and optimization (NETGCOOP11)*, Paris, France, 2011.
- [81] M. Le Treust, S. M. Perlaza, and S. Lasaulce. Contrôle de puissance distribué efficace Énergétiquement et jeux répétés. *Actes de la Conférence du Groupement de Recherche en Traitement du Signal et des Images (GRETSI09)*, Dijon, France, 2009.
- [82] M. Le Treust, A. Zaidi, and S. Lasaulce. An achievable rate region for the broadcast wiretap channel with asymmetric side information. *IEEE Proc. of the 49th Allerton conference*, Monticello, Illinois, 2011.
- [83] Y. Wu, B. Wang, K. J. R. Liu, and T. C. Clancy. Repeated open spectrum sharing game with cheat-proof strategies. *IEEE Trans. on Wireless Comm.*, 8(4) :1922–1933, 2009.

- [84] A. D. Wyner. Recent results in Shannon theory. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 20(1) :2–10, 1974.
- [85] A. D. Wyner. The wire-tap channel. *The Bell System Technical Journal*, 54(8) :1355–1387, 1975.

